(7 pages)

S.No. 3743 T **16 SCCMM 7**

(For candidates admitted from 2016–2021 batch)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2023.

Part III — Mathematics – Major

VECTOR CALCULUS AND FOURIER SERIES

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL the questions.

1. ϕ என்பது அளவெண்புள்ளி சார்பு மற்றும் k என்பது மாறா எண் எனில் $\nabla(k\phi) = k(\nabla\phi)$ என நிரூபி.

   If ϕ is a scalar point function and k is a constant then prove that $\nabla(k\phi) = k(\nabla\phi)$.

2. விகிதமுறா நெரியன் வரையறு.

   Define irrotational vector.

3. $\vec{F} = 3x^2y\vec{i} - 4xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ எனில் $div\vec{F}$ காண்க.

   Find $div\vec{F}$ where $\vec{F} = 3x^2y\vec{i} - 4xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$.

4. $\vec{F}$ என்பது ஒரு காப்பு மண்டலம் எனில் $\nabla \times \vec{F}$ காண்க.

   If $\vec{F}$ is a conservative force, then find $\nabla \times \vec{F}$.

5. ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தை எழுதுக.

   State Stoke's theorem.

6. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ மற்றும் v என்பது $0 \le x, y, z \le 1$ சூழப்பட்ட தொகுதி எனில் $\iiint_v \nabla \cdot \vec{F}\, dv$ மதிப்பு காண்க.

   Evaluate $\iiint_v \nabla \cdot \vec{F}\, dv$ if $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ and if v is the volume of the region enclosed by the cube $0 \le x, y, z \le 1$.

7. இரட்டைப்படை சார்பை வரையறு.

   Define even function.

8. $x\cos x$ என்ற சார்பில் $(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் ஃபுரியர் தொடரின் மாறா உறுப்பு காண்க.

   Find the constant term of the Fourier series of $x\cos x$ in the interval $(-\pi, \pi)$.

9. ஃபுரியர் கொசைன் தொடரை $(0, \pi)$ இடைவெளியில் தொடரை காண்க.

   Write the formula to find the Fourier cosine series in the interval $(0, \pi)$.

10. $f(x) = a$ என்ற சார்பில், $(0, l)$ இடைவெளியில் ஃபுரியர் சைன் தொடரை காண்க.

    Find the Fourier sine series of $f(x) = a$ in $(0, l)$.

PART B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions choosing either (a) or (b).

11. (அ) $\phi = x + xy^2 + yz^3$ என்ற சார்பின் (0, 1, 1) என்ற புள்ளியில் $2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ என்ற திசையில் திசை வழித் தோன்றலைக் கண்டுபிடி.

Find the directional derivative of $\phi = x + xy^2 + yz^3$ at (0, 1, 1) in the direction of $2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Or

(ஆ) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ மற்றும் $|\vec{r}| = r$ எனில் $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\vec{r}}{r^3}$ என நிரூபி.

If $\vec{r}$ is the position vector $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ and $|\vec{r}| = r$ then show that $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\vec{r}}{r^3}$.

12. (அ) $\nabla\phi = (6xy + z^3)\vec{i} + (3x^2 - z)\vec{j} + (3xz^2 - y)\vec{k}$ எனில் ϕ யை கண்டுபிடி.

Find ϕ if

$$\nabla\phi = (6xy + z^3)\vec{i} + (3x^2 - z)\vec{j} + (3xz^2 - y)\vec{k}.$$

Or

(ஆ) $\vec{f} = (y + y^2 + z^2)\vec{i} + (x + z + 2xy)\vec{j} + (y + 2zx)\vec{k}$ என்பது காப்பு மண்டலம் எனில் அதன் அளவிடல் திறனை காண்க.

If

$$\vec{f} = (y + y^2 + z^2)\vec{i} + (x + z + 2xy)\vec{j} + (y + 2zx)\vec{k}$$

is conservative, then find its scalar potential.

13. (அ) s என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தில் பரப்பு எனில் $\iint_S \vec{r} \cdot n\, ds = 4\pi a^2$ எனக் காட்டு.

Show that $\iint_S \vec{r} \cdot n\, ds = 4\pi a^2$ if s is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Or

(ஆ) $A = zy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ க்கு ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தை சரிபார், இதில் s என்பது $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ஆகிய தளங்கள் சூழ்ந்த பகுதியின் பரப்பு ஆகும்.

Verify stoke's theorem for $A = zy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ taken over the triangular surface s in the plane $x + y + z = 1$ bounded by the planer $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ and over its boundary.

14. (அ) $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$ எனில், $(0, 2\pi)$ இடைவெளியில் ஃபூரியர் தொடரைக் காண்க.

If $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$, find the Fourier series of period 2π in the interval $(0, 2\pi)$.

Or

(ஆ) $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & \pi<x<2\pi\end{cases}$-ன் ஃபூரியர் தொடரை பெறு.

Obtain the Fourier series for the function $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & \pi<x<2\pi\end{cases}$.

15. (அ) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$-ன் ஃபூரியர் சைன் தொடரைக் காண்க.

Find the Fourier sine series of $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$.

Or

(ஆ) $f(x)=x$ -ன் அரைவிசை ஃபூரியர் சைன் தொடரை $(0, l)$ இடைவெளியில் காண்க.

Find the Half-Range Fourier sine series for $f(x)=x$ in $(0, l)$.

PART C — $(3\times 10=30)$

Answer any THREE questions.

16. $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$ எனக் காட்டு.

Show that $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$.

17. $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$ மற்றும் s என்பது ஆகிய $x=0, y=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ தளங்கள் சூழ்ந்த கனசதுரத்தின் தளம் எனில $\iint_s \vec{F}\cdot n\,ds$-ன் மதிப்பை காண்க.

Evaluate $\iint_s \vec{F}\cdot n\,ds$ if $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$ and s is the surface of the cube bounded by the planes $x=0, y=1, y=0, y=1, z=0$ and $z=1$.

18. $\int_c \left(x^2 y dx + y dy\right)$-க்கு கிரீன்ஸ் தேற்றத்தை சரிபார். இதில் C என்பது $y = x$ மற்றும் $y^2 = x$ ஆகிய வளைவுகள் மூடிய பகுதி ஆகும்.

Verify Green's theorem in the plane for the integral $\int_c \left(x^2 y dx + y dy\right)$ where C is the curve enclosing the region R bounded by the line $y = x$ and the parabola $y^2 = x$.

19. $f(x) = |\cos x|$ -ன் ஃபூரியர் தொடரை $(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் விரிவாக்கு.

Expand $f(x) = |\cos x|$ in a Fourier series in the interval $(-\pi, \pi)$.

20. $f(x) = x \sin x$ -ன் அரைவிசை ஃபூரியர் கொசைன் தொடரை $(0, \pi)$ இடைவெளியில் காண்க.

Find the Halfrange Fourier cosine series for $f(x) = x \sin x$ in $(0, \pi)$.