

(7 pages)

S.No. 4216 T

NSSM 5

(For candidates admitted from 2007-2008 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2023.

Part III — Mathematics – Major

MODERN ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

PART A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL the questions.

1. நிரல் அணி வரையறு ஏதேனும் ஒரு உதாரணம் தருக.
Define row matrix. Give an example.
2. வரையறு - சமச்சீர் தொடர்பு
Define symmetric relation.
3. வரையறு - உட்குலம்
Define subgroup.
4. வரையறு - குலத்தின் உள்கோர்த்தல்
Define homomorphism of a group.
5. வரையறு : எண் அரங்கம்
Define integral domain.
6. வளையம் R ல் $a0 = 0a = 0$ என நிரூபி.
If R is a ring then prove that $a0 = 0a = 0$.

7. வரையறு : உட்புலம்

Define sub field.

8. வரையறு : உள்வளையம்

Define Subring.

9. வெக்டர் வெளி V யில் $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ என நிரூபி.

In a vector space V prove that $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$

10. $V_n(F)$ ன் நிலையான அடியை எழுதுக.

Write the standard basis of $V_n(F)$.

PART B — (5 × 6 = 30)

Answer ALL the questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) AB காண்க இங்கு $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Find AB if $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Or

(ஆ) A, B இரு கணங்கள் எனில் $A - B$ -யும் $B - A$ -யும் வெட்டாதவை என நிரூபி.

If A and B are two sets prove that $A - B$ and $B - A$ are disjoint.

12. (அ) அபீலியன் குலத்தின் எல்லா உட்குலமும் normal உட்குலம் என நிரூபி.

Prove that every subgroup of an abelian group is a normal subgroup.

Or

(ஆ) குலம் G யில் $f: G \rightarrow G$ ஆனது $f(x) = x^{-1}$ என்று வரையறுக்கப்பட்டது செயல்மாறா கோர்த்தல் $\Leftrightarrow G$ ஒரு அபீலியன் குலம் என நிரூபி.

In a group G , show that $f: G \rightarrow G$ given by $f(x) = x^{-1}$ is an isomorphism $\Leftrightarrow G$ is abelian.

13. (அ) R ஒரு சமனி உறுப்புடைய வளையம் எனில் R ல் உள்ள அலகு உறுப்புகளின் கணம் பெருக்கலை பொறுத்து குலம் என நிரூபி.

If R is a ring with identify. Prove that the set of all units in R is a group identify. Prove that the set of all units in R is a group under multiplication.

Or

(ஆ) $f: R \rightarrow R'$ உருமாற்றம், s ஆனது R_1 ன் உள்வளையம் எனில் $f(s)$ ஆனது $f(R)$ ன் உள்வளையம் என நிரூபி.

If s is a subring of R_1 then prove that $f(s)$ is an ideal of $f(R)$ where $f: R \rightarrow R'$ is a homomorphism.

14. (அ) பரிமாற்று வளையம் R ஒரு புலம் $\Leftrightarrow R$ க்கு சரியான சீரிய உட்கணம் இல்லை என நிரூபி.

Prove that a commutative ring R is field $\Leftrightarrow R$ has no proper ideals.

Or

(ஆ) புலம் k இல் $f(t)$ ஒரு பல்லுறுப்பு கோவை மற்றும் $\deg f = n$ எனில் $f(t)$ க்கு k யில் அதிகபட்சமாக n மூலங்கள் உண்டு என நிரூபி.

If $f(t)$ is a polynomial over a field k and $\deg f = n$, then prove that $f(t)$ has atmost n roots in k .

15. (அ) வெக்டர் வெளியில் இரு உள்வெளிகளின் வெட்டுக் கணம் உள்வெளி என நிரூபி.

Prove that the intersection of two subspaces of a vector spaces is a subspace.

Or

(ஆ) $T: R^2 \rightarrow R^2$, $T(a, b) = (a + b, a - b)$ என்று வரையறுக்கப்பட்டால் T ஆனது ஒருபடி உருமாற்றம் என நிரூபி.

Prove that $T: R^2 \rightarrow R^2$ defined by $T(a, b) = (a + b, a - b)$ is a linear transformation.

PART C — (5 × 10 = 50)

Answer ALL the questions.

16. (அ) இரு equivalence தொடர்புகளின் வெட்டுக்கணமும் ஒரு equivalence தொடர்பு என நிரூபி.

Prove that the intersection of two equivalence relation is an equivalence relation.

Or

(ஆ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ எனில்

AB, BA காண்க.

If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ find

AB and BA .

17. (அ) குலத்தில் உருமாற்றத்தின் அடிப்படை தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove the fundamental theorem of homomorphism on groups.

Or

(ஆ) குலத்தில் தன் உருமாற்றம் ஆனது equivalence தொடர்பு என நிரூபி.

Show that isomorphism is an equivalence relation among groups.

18. (அ) R - வளையம், $I, \dots, (R, +)$ ஒரு உட்குலம் எனில் R/I ல் $(I + a)(I + b) = I + ab$ என்பது நன்றாக வரையறுக்கப்பட்டது $\Leftrightarrow I$ ஆனது R ன் என நிரூபி.

If R is a ring, I a subgroup of $(R, +)$ then prove that multiplication on R/I given by $(I + a)(I + b) = I + ab$ is well defined $\Leftrightarrow I$ is an ideal of R .

Or

(ஆ) முடிவுறு எண் அரங்கம் ஒரு புலம் என நிரூபி.

Prove that any finite integral domain is a field.

19. (அ) p -பகர் எண் எனில் $(Z_p, +, \cdot)$ ஒரு புலம் என நிரூபி.

If p is a prime number, show that $(Z_p, +, \cdot)$ is a field.

Or

- (ஆ) பல்லுறுப்பு கோவையில் ஒரே மாதிரி காரணிப்படுத்தல் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove unique fabrication theorem on polynomials.

20. (அ) புலம் F ல் V ஆனது முடிவுறு வெக்டர் வெளி A, B என்பன உள்வெளிகள் எனில் $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$ என நிரூபி.

If V is a finite dimensional vector space over a field F and A, B are subspaces of V then prove that

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

Or

- (ஆ) புலம் F ல் V ஒரு வெக்டர் வெளி A, B அதன் உள்வெளி எனில் $\frac{A + B}{A} \approx \frac{B}{A \cap B}$ என நிரூபி.

If V is a vector space over a field F and A, B are subspaces of V then prove that

$$\frac{A + B}{A} \approx \frac{B}{A \cap B}.$$