(8 pages)

S.No. 4210 T **NSSM 1**

(For candidates admitted from 2007-2008 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2023

Part III — Mathematics — Major

ALGEBRA AND CALCULUS

Time : Three hours Maximum : 100 marks

PART A — $(10 \times 2 = 20)$

Answer ALL questions.

1. $\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ ன் விரிவு எழுதுக.

   Write the expansion of $\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

2. 600க்கு குறைவாகவும் அதனுடன் பகுப்படாமலும் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை காண்க.

   Find the number of integers less than 600 and prime to it.

3. $1+i$ ஐ மூலமாக உள்ள சமன்பாடு காண்க.

   Find the equation whose root is $1+i$.

4. $x^3 - 2x + 10 = 0$ ன் மூலங்களை 5 ஆல் பெருக்கவும்.

   Multiply the roots of $x^3 - 2x + 10 = 0$ by 5.

5. $y = \sin x$ என்ற வளைவின் $x = \dfrac{\pi}{2}$ என்ற புள்ளியில் வளைவு ஆரம் காண்க.

   Find the radius of curvature at $x = \dfrac{\pi}{2}$ on the curve $y = \sin x$.

6. $p-r$ அச்சுகளில் வளைவு ஆரத்தின் சூத்திரம் எழுதுக.

   Write the formula for radius of curvature in $p-r$ coordinates.

7. மதிப்பிடுக $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{3/2}}{(\sin x)^{3/2} + (\cos x)^{3/2}} dx$.

   Evaluate $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{3/2}}{(\sin x)^{3/2} + (\cos x)^{3/2}} dx$.

8. கணக்கிடுக $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 xy\, dx\, dy$

   Evaluate $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 xy\, dx\, dy$.

9. வரையறு : பீட்டா சார்பு.

Define Beta function.

10. நிரூபி : $\overline{|(x)} = 1$.

Prove $\overline{|(x)} = 1$.

PART B — (5 × 6 = 30)

Answer ALL questions.

11. (அ) a, b, c என்பன அடுத்தடுத்த எண்கள் எனில்

$$\log b = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log c + \frac{1}{2ac+1} + \frac{1}{3(2ac+1)^3} + \frac{1}{5(2ac+1)^5} + \ldots$$

என நிரூபி.

If a, b, c are consecutive integers, show that

$$\log b = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log c + \frac{1}{2ac+1} + \frac{1}{3(2ac+1)^3} + \frac{1}{5(2ac+1)^5} + \ldots$$

Or

(ஆ) (61)! ன் முடிவில் எத்தனை பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன என காண்க.

Find the number of zeroes with which (61)! ends.

12. (அ) $4x^3 - 36x^2 + 59x + 39 = 0$ ன் மூலங்கள் கூட்டுத்தொடர் எனில் தீர்க்க.

Solve $4x^3 - 36x^2 + 59x + 39 = 0$ given that the roots are in AP.

Or

(ஆ) $x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = 0$ ன் மூலங்களை 2 ஆல் குறைக்க.

Diminish the roots of $x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = 0$ by 2.

13. (அ) $x^2 + y^2 = 2ax$ ன் $p - r$ சமன்பாடு காண்க.

Find the $p - r$ equation of $x^2 + y^2 = 2ax$.

Or

(ஆ) $r = a\sin\theta$ என்ற வளைவின் வளைவு ஆரம் காண்க.

Find the various of curvature of $r = a\sin\theta$.

14. (அ) நிரூபி : $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

Prove $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

Or

(ஆ) வரிசையை மாற்றி $\int_0^{a} \int_{x^2/a}^{2a-x} xy\, dx\, dy$ ஐ மதிப்பிடுக.

By changing the order of integration, evaluate $\int_0^{a} \int_{x^2/a}^{2a-x} xy\, dx\, dy$.

15. (அ) நிரூபி $\int_0^{\infty} \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}} dx = 0$.

Prove $\int_0^{\infty} \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}} dx = 0$.

Or

(ஆ) காமா சார்பை பயன்படுத்தி $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ என நிரூபி.

Prove that $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ using Gamma function.

PART C — (5 × 10 = 50)

Answer ALL questions.

16. (அ) கூடுதல் காண்க :

$$\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \ldots$$

Sum the series $\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \ldots$

Or

(ஆ) கூடுதல் காண்க $1 + \frac{2^3 \cdot x}{1!} + \frac{3^3 . x^2}{2!} + \ldots$

Sum the series $1 + \frac{2^3 \cdot x}{1!} + \frac{3^3 . x^2}{2!} + \ldots$

17. (அ) $x^7 - 3x^4 + 2x^3 - 1 = 0$ க்கு குறைந்தது 4 கற்பனை மூலங்கள் உண்டு என நிரூபி.

Show that $x^7 - 3x^4 + 2x^3 - 1 = 0$ has atleast four imaginary roots.

Or

(ஆ) தீர்க்க $6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0$.

Solve $6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0$.

18. (அ) $y^2 = 4ax$ என்ற வளைவின் பரிணாமம் காண்க.

Find the evolute of $y^2 = 4ax$.

Or

(ஆ) $r^n = a^n \cos n\theta$ என்ற வளைவின் $p-r$ சமன்பாடு காண்க.

Find the $p-r$ equation of the curve $r^n = a^n \cos n\theta$.

19. (அ) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ ஆகிய தளங்களால் சூழப்பட்ட பகுதியில் $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$ ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$ over the region bounded by the planes $x=0$, $y=0$, $z=0$ and $x+y+z=1$.

Or

(ஆ) $I_n = \int \sin^n x\,dx$ எனில் $I_n = -\frac{\sin^{n-1}}{n}\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ என நிரூபி. மேலும் $\int \sin^4 x\,dx$ காண்க.

If $I_n = \int \sin^n x\,dx$ prove that $I_n = -\frac{\sin^{n-1}}{n}\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ and hence find $\int \sin^4 x\,dx$.

20. (அ) நிரூபி $\beta(m,n) = \beta(n,m)$.

Prove $\beta(m,n) = \beta(n,m)$.

Or

(ஆ) நிரூபி $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Prove $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

———————