

(6 pages)

S.No. 3759 T

16 SMBEMM 3 : 2

(For candidates admitted from 2016-2021 Batch)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2023.

Part III — Mathematics — Major Based Elective

NUMBER THEORY

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL the questions.

1. a மற்றும் b -க்கான மீபெவ வரையறுக்க.
Define gcd of a and b .
2. $3x + 6y = 18$ -க்கான ஏதேனும் இரண்டு தீர்வுகளை கொடு.
Give any two solutions for $3x + 6y = 18$.
3. ஆயிலர் சார்பு $\phi(m)$ -யினை வரையறு.
Define the Euler's function $\phi(m)$.
4. குறைக்கப்பட்ட எச்ச தொகுப்பு மட்டு 10-யினை காண்க.
Find a reduced residue system modulo 10.

5. $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ என்ற சமன்பாடு எத்தனை தீர்வுகளை பெற்றுள்ளது?

How many solutions does the equation

$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ have?

6. a ஆனது b -க்கு ஒருமித்த மட்டு m என்று எப்போது கூறுவாய்?

When do you say a is congruent to b modulo m ?

7. மீபெவ $(a, n) = 1$ எனில், $ax \equiv b \pmod{n}$ -க்கு எவ்வளவு தீர்வுகள் இருக்கும்?

If $\gcd(a, n) = 1$, then how many solutions are there for $ax \equiv b \pmod{n}$?

8. m மற்றும் n ஆனது சார்பான மிகை பகா எண்கள் எனில் $F(mn)$ -வை பற்றி என்ன கூறுவாய்?

If m and n are relative prime positive integers, then what can you say about $F(mn)$?

9. மொபியஸ் மூ- சார்பை வரையறு.

Define Mobius Mu function.

10. மொபியஸ் மூ சார்பிற்கு $n = 1, 2, 3, 4, 5$ -க்கான மதிப்புகளை காண்க.

Find the values of Mobius Mu function for $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

PART B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL the questions, Choosing either (a) or (b).

11. (அ) $n > 1$ -க்கான ஒவ்வொரு என்னும் பகா எண் அல்லது பகா எண்ணின் பெருக்கல் என நிறுவுக.
Prove that every integer $n > 1$ is either a prime number or a product of prime numbers.

Or

- (ஆ) $ax + by = c$ என்ற ஒருபடி டயோபென்டைன் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு இருப்பதற்கான தேவையானதும், போதுமானதுமான கட்டுப்பாட்டினை கூறுக. x_0, y_0 என்பன ஏதேனும் இரு தீர்வுகள் எனில் மற்ற எல்லா தீர்வுகளையும் காண்க.
State the necessary and sufficient condition for the existence of a solution to the linear diophantine equation $ax + by = c$. If x_0, y_0 are two solutions, find all other solutions.

12. (அ) பெர்மேட் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove Fermat's theorem.

Or

- (ஆ) p என்பது ஒரு பகா எண் என்க. $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ -க்கு தேவையானதும் போதுமானதும் ஆனது $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$ என நிறுவுக.

Let p be a prime number. Then prove that $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ if and only if $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

13. (அ) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மட்டு $1, 2, \dots$ -க்கு என்ற எச்ச வகுப்புகள் வெவ்வேறானவை என்றும், அவைகளின் சேர்ப்பு எல்லா எண்களின் கணம் எனவும் நிறுவுக.

Show that for a given modulus m , the residue classes $1, 2, \dots$ in all disjoint and their union is the set of all integers.

Or

- (ஆ) ஒருமித்தமான $5x \equiv 3 \pmod{24}$ -யினை தீர்க்க.
Solve the congruence $5x \equiv 3 \pmod{24}$.

14. (அ) $x \equiv 5 \pmod{7}$, $x \equiv 7 \pmod{11}$ மற்றும் $x \equiv 3 \pmod{13}$ என்றவாறு குறைந்த மிகை எண் -யை காண்க.

Find the least positive integer x such that $x \equiv 5 \pmod{7}$, $x \equiv 7 \pmod{11}$ and $x \equiv 3 \pmod{13}$

Or

- (ஆ) சைனாவின் மீதித் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove Chinese remainder theorem.

15. (அ) மொபியஸ் நேர்மாறு சூத்திரத்தினை கூறி நிறுவுக.
State and prove Mobius inversion formula.

Or

- (ஆ) $n \geq 1$, -க்கு $\phi(u) = \sum_{d|u} \mu(d) \frac{u}{d}$ என நிறுவுக.

For $n \geq 1$, prove that $\phi(u) = \sum_{d|u} \mu(d) \frac{u}{d}$.

PART C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

16. யூக்ளிடிஸ் செயல்முறை வடிவமைப்பினை கூறி நிறுவுக.
State and prove the Euclidean algorithm.
17. வில்சனின் தேற்றத்தினை கூறி நிறுவுக.
State and prove Wilson's theorem.
18. எந்தவொரு பகா எண். p -க்கும், $f(x) = (x-1)(x-2) \dots (x-p+1) - x^{p-1} + 1$ என்ற பல்லுறுப்பு கோவையின் எல்லா கெழுக்களும் p -ஆல் வகுபடும் என காட்டுக.
For any prime number p , show that all the coefficients of the polynomial. $f(x) = (x-1)(x-2) \dots (x-p+1) - x^{p-1} + 1$ are divisible by p .

19. ஒருபடி ஒருமித்த $ax \equiv b(\text{mod } n)$ -க்கு தீர்வு இருப்பதற்கான தேவையானதும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாட்டினை கூறி நிறுவுக.

State and prove the necessary and sufficient condition for the existence of a solution to the linear congruence $ax \equiv b(\text{mod } n)$.

20. $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d)$ எனில், ஒவ்வொரு மிகை எண் n -க்கும் $f(n) = \sum_{d|n} f(d)$ என காட்டுக.

If $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d)$ for every positive integer n , then show that $f(n) = \sum_{d|n} f(d)$.