(6 pages)

S.No. 3756 T **16 SMBEMM 2 : 1**

(For candidates admitted from 2016-2021 Batch)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2023

Part III — Mathematics — Major Based Elective

GRAPH THEORY

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL the questions.

1. கனமான வரைவினை வரையறு.

   Define cubic graph.

2. தூண்டப்பட்ட உள்வரைவினை வரையறு.

   Define induced subgraph.

3. சேர்ப்பு அணியின் ஏதேனும் இரண்டு பண்புகளை கூறுக.

   State any two properties of an adjacency matrix.

4. பிளரியின் படிமுறையை எழுதுக.

   Write Fleury's algorithm.

5. ஒரு வரைவினை எப்போது தீட்டா வரைவு எனக் கூறுவாய்?

   When do you say a graph is a theta graph?

6. ஒரு வரைவின் மைய தொலைவினை வரையறு.

   Define eccentricity of a graph.

7. ஒரு வரைவினை பதித்தல் என்பதன் பொருள் என்ன?

   What is meant by embedding of a graph?

8. ஒரு தளத்தில் ஒவ்வொரு ஜோடி பகுதிகளும் அடுத்தடுத்து உள்ள பகுதிகளாக இருக்குமாறு ஒரு வரைபடம் இருக்குமா?

   Is there a map write five regions in a plane so that every pair of regions are adjoint?

9. எடை கொண்ட வரைவினை வரையறு.

   Define weighted graph.

10. ———— எனில் ஒரு திசை வரைவு செயல்பாட்டுடையது.

    A digraph is called functional if ————

SECTION B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b)

11. (அ) இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நபர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவில், எப்போதும் ஒரே எண்ணிக்கையை கொண்ட நபர்களை பெற்றவாறு சரியாக இருவர் இருப்பர் எனக் காட்டுக.

    Show that in any group of two or more people, there an always two with exactly the same number of friends inside the group.

Or

(ஆ) நிறுவுக $\Gamma(G)=\Gamma(\overline{G})$.

Prove that $\Gamma(G)=\Gamma(\overline{G})$.

12. (அ) G_1 என்பது ஒரு வரைவு, G_2 என்பது (p_2,q_2) வரைவு என்க. $G_1 \times G_2$ என்பது $(p_1 p_2, q_1 p_2 + q_2 p_1)$ வரைவு என நிறுவுக.

Let G_1 be a (p_1,q_1) graph and G_2 a (p_2,q_2) graph. Then prove that $G_1 \times G_2$ is a $(p_1 p_2, q_1 p_2 + q_2 p_1)$ graph.

Or

(ஆ) ஒற்றைப்படையில் நீளம் கொண்ட ஒரு மூடிய நடப்பு சுழற்சியை கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that a closed walk of odd length contains a cycle.

13. (அ) G என்பது $p \geq 3$ உள்ள புள்ளிகளையும், $\delta \geq p/2$ என்றவாறு இருந்தால் G ஒரு ஹாமில்டானியன் என நிறுவுக.

If G is a graph with $p \geq 3$ vertices and $\delta \geq p/2$ then prove G is hamiltonian.

Or

(ஆ) G ஆனது ஒரு மரம் எனில் G-ல் உள்ள எந்த இரு புள்ளிகளும் ஒரு தனித்த பாதையினால் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் என நிறுவுக.

If G is a tree than prove that every two points of G are joined by a unique path.

14. (அ) ஒரு வரைவினை கோளத்தின் மேற்பரப்பில் பதிக்க முடியும் என்பதற்கான சமமான நிபந்தனை அதனை ஒரு தளத்தில் பதிக்க முடியும் என்பதாகும் என நிறுவுக.

Prove that a graph can be embedded in the surface of a sphere iff it can be embedded in a plane.

Or

(ஆ) ஆயிலரின் பலகோண சூத்திரத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove Euler's polyhedron formula.

15. (அ) ஒரு வரைவின் மூன்று வகையான கூறுகளை விவாதி.

Discuss the three different kinds of components of a graph.

Or

(ஆ) மீச்சிறு பாதையினை காண்பதற்கான டிஜிஸ்ட்ராவின் படிமுறையினை எழுதுக.

Write Dijkstra's algorithm for finding a shortest path.

SECTION C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

16. p புள்ளிகளை கொண்ட முக்கோணம் பெற்றிராத வரைவுகள் அதிகப்படியாக $\left[\frac{p^2}{4}\right]$ -கோடுகளை பெற்றிருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that the maximum number of lines among all p point graphs with no triangle is $\left[\frac{p^2}{4}\right]$.

[P.T.O.]

17. A என்பது $V=\{v_1, v_2, \ldots v_p\}$ -யை கொண்ட ஒரு வரைவின் சேர்ப்பு அணி எனில், எந்தவொரு $n \geq 1$ -க்கும் A^n -ல் $(i, j)^{\omega}$ -வின் பதிவு நீளம் n கொண்ட $v_i - v_j$ நடப்புகளின் எண்ணிக்கை என நிறுவுக.

If A is the adjacency matrix of a graph write $V=\{v_1, v_2, \ldots v_p\}$, prove that for any $n \geq 1$ the $(i, j)^{\omega}$ entry of A^n is the number of $v_i - v_j$ walks of length n in G.

18. ஒரு வரைவின் அடைவு நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது என நிறுவுக.

Prove that the closure of a graph is well-defined.

19. குறைந்தபட்சம் 3 புள்ளிகளை கொண்ட ஒவ்வொரு தள வரைவும், அதே எண்ணிக்கையிலான புள்ளிகளை கொண்ட முக்கோணப்படுத்தபட்ட ஒரு வரைவின் உள் வரைவு என நிறுவுக.

Prove that every planer graph a with at least 3 points is a subgraph of a triangulated graph write the same number of points.

20. ஒரு தொடர்புடைய வரைவு G -ன் கோடுகள், வலுவான தொடர்புடைய திசைவரைவினை பெறுமாறு அமைக்க முடியும் என்பது G -யின் ஒவ்வொரு கோடும் குறைந்தபட்சம் ஒரு சுழற்சியில் இருக்கும் என்பதற்கு சமமானது என நிறுவுக.

Prove that the edges of a connected graph G can be oriented so that the resulting digraph is strongly connected iff every edge of G is contained in at least one cycle.