

(7 pages)

S.No. 3754 T

16 SCCMM 13

(For candidates admitted from 2016-2021 Batch)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2023.

Part III — Mathematics — Major

COMPLEX ANALYSIS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL the questions.

1. $w = z^3$ -யினை $u(x, y) + iv(x, y)$ வடிவில் விவரிக்க.
Express $w = z^3$ in the form of $u(x, y) + iv(x, y)$.
2. ஒரு சிக்கல் சார்பினை Z என்ற புள்ளியிடத்து எப்போது வகையிடத்தக்கது என கூறுவாய்?
When do you say a complex function is differentiable at a point Z ?
3. $w = \frac{1}{z}$ என்ற மாற்றத்தினை பற்றி சிறு குறிப்பு எழுதுக.

Write a short note on the transformation $w = \frac{1}{z}$.

4. இரு கோட்டு மாற்றத்தினை வரையறு.

Define bilinear transformation.

5. ஒரு துண்டு வழி வகையிடத்தக்க வளைவரையின் நீளத்தினை வரையறு.

Define the length of a piecewise differentiable curve.

6. மொரேராவின் தேற்றத்தை கூறுக.

State Morera's theorem.

7. e^{-z} -ன் மெக்லார் தொடரின் விரிவினை எழுதுக.

Write Maclaurin's series expansion of e^{-z} .

8. லாரண்ட்ஸின் தேற்றத்தை கூறுக.

State Laurent's theorem.

9. $z = a$ -யிடத்து $f(z)$ -ன் எச்சத்தினை வரையறு.

Define residue of $f(z)$ at $z = a$.

10. ரௌசியின் தேற்றத்தை கூறுக.

State Rouché's theorem.

PART B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL the questions, Choosing either (a) or (b).

11. (அ) $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ -க்கு C-R

சமன்பாடுகளை சரிபார்க்க.

Verify CR - equations for $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

Or

- (ஆ) $w = \frac{5-4z}{4z-2}$ என்ற மாற்றமானது $|z| = 1$ என்ற

ஒரலகு வட்டத்தினை மையம் $-\frac{1}{2}$ மற்றும் ஒரலகு ஆரமுடைய வட்டமாக கோர்க்கிறது எனக் காட்டுக.

Show that the transformation $w = \frac{5-4z}{4z-2}$ maps the unit circle $|z| = 1$ into a circle of radius units and center $-\frac{1}{2}$.

12. (அ) $|z-3i|=3$ என்ற வட்டத்திற்கு $w = \frac{1}{2}$ என்ற கோர்த்தலின் கீழ் பிம்பத்தைக் காண்க.

Find the image of the circle $|z-3i|=3$ under the map $w = \frac{1}{2}$.

Or

3

S.No. 3754 T

- (ஆ) $z=1$ என்ற ஒரலகு வட்டத்தினை $|w|=1$ ஆகவும், $|z|=1$ -யினை $w=1$ ஆகவும், மற்றும் $z=-1$ -யினை $w=-1$ ஆகவும் கோர்க்கும் பொது இருகோட்டு மாற்றத்தினை காண்க.

Find the general bilinear transformation which maps the unit circle $|z|=1$ onto $|w|=1$ and the points $z=1$ to $w=1$ and $z=-1$ to $w=-1$.

13. (அ) $M = \max\{|f(z)| / z \in C\}$ மற்றும் l என்பது C -யின் நீளம் எனில் $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M l$ என நிறுவுக.

Prove that $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M l$, where $M = \max\{|f(z)| / z \in C\}$ and l is the length of C .

Or

- (ஆ) C என்பது ஒரலகு வட்டமெனில் $\int_C \frac{z^3 dz}{(2z+i)^3}$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\int_C \frac{z^3 dz}{(2z+i)^3}$ where C is the unit circle.

4

S.No. 3754 T

[P.T.O.]

14. (அ) $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ யினை $|z| < 2$ -ல் குறிப்பிடும்

டெயிலரின் தொடராக காண்க.

Find the Taylor's series to represent

$$\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)} \text{ in } |z| < 2.$$

Or

- (ஆ) $2 < |z| < 3$ என்ற இடைப்பட்ட பகுதியில்

மதிப்பினை பெறும் $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ என்ற சார்பின்

லாரண்டஸ் தொடரின் விரிவை காண்க.

Find Laurent's series expansion of the

function $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ valid in the annular region. $2 < |z| < 3$.

15. (அ) C ஆனது $3+3i, 3-3i, -3+3i, -3-3i$. என்ற உச்சி புள்ளிகளை கொண்ட சதுரம் எனில்

$$\int_C \frac{2+3\sin \pi z}{z(z-1)^2} dz \text{ -ன் மதிப்பு காண்க.}$$

Evaluate $\int_C \frac{2+3\sin \pi z}{z(z-1)^2} dz$ where C is the

square having vertices $3+3i, 3-3i, -3+3i, -3-3i$.

Or

- (ஆ) C ஆனது $|z-1|=1$ என்ற வட்டம் எனில்

$$\int_C \frac{e^z}{(z+2)(z-1)} dz \text{ -ன் மதிப்பு காண்க.}$$

Evaluate $\int_C \frac{e^z}{(z+2)(z-1)} dz$ where C is the circle $|z-1|=1$.

PART C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

16. சிக்கல் சார்பு வகையிடத்தக்கதாக இருப்பதற்கான போதுமான கட்டுப்பாடுகளை கூறி நிறுவுக.

State and prove the sufficient condition for differentiability of complex functions.

17. $|z|=1$ என்ற ஓரலகு வட்டத்தினை $|w|=1$ என்ற ஓரலகு வட்டமாக மாற்றும் எந்தவொரு இருகோட்டு

மாற்றத்தினையும் $w = e^{i\lambda} \left[\frac{z-\alpha}{\lambda z-1} \right]$ என்ற வடிவில் எழுத

முடியும் எனக் காட்டுக.

Show that any bilinear transformation which maps the unit circle $|z|=1$ onto the unit circle.

$|w|=1$ can be written in the form $w = e^{i\lambda} \left[\frac{z-\alpha}{\lambda z-1} \right]$.

Where λ is real.

18. காசியின் தொகையீட்டு குத்திரத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove Cauchy's integral formula.

19. டெய்லரின் தொடரை கூறி நிறுவுக.

State and prove Taylor's series.

20. நிறுவுக $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, (-1 < a < 1).$

Prove that $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, (-1 < a < 1).$
