

(6 pages)

S.No. 3749 T

16 SCCMM 10

(For candidates admitted from 2016–2021 Batch)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2023.

Part III — Mathematics – Major

REAL ANALYSIS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL the questions.

1. மூவகுப்பு முறை விதியினை கூறுக.
State the law of trichotomy.
2. S என்ற கணத்தின் மேன்மம் வரையறு.
Define supremum of a set S.
3. ஒரு சார்பு $+\infty$ -யை நெருங்குகிறது என எப்போது கூறுவாய்?
When do you say a function approaches to $+\infty$.
4. டிரிச்சலெட்-ன் சார்பு வரையறு.
Define Dirichlet's function.

5. f என்ற சார்புக்கு x_0 -இடத்து வகையிடலை வரையறு.
Define derivative of a function f at x_0 .
6. $f(x) = c$ எனில் $f'(x) = 0$ என காட்டுக.
If $f(x) = c$, then show that $f'(x) = 0$.
7. ரோலின் தேற்றத்தை கூறுக.
State Rolle's Theorem.
8. $\sin x$ -ன் மெக்ளாரின் தொடர் விரிவினை எழுதுக.
Write the Maclaurin's series expansion of $\sin x$.
9. ரீமான் கூடுதல் வரையறு.
Define Riemann sum.
10. நுண் கணிதத்தின் அடிப்படை தேற்றத்தினை கூறுக.
State fundamental theorem of calculus.

SECTION B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL the questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) எல்லா மெய் எண்கள் x, y -க்கு $|x + y| \leq |x| + |y|$ என நிறுவுக.
For all real numbers x and y prove that $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Or

(ஆ) 2-யினை வர்க்கமாக கொண்டவாறு எந்தவொரு விகிதமுறு எண்ணும் இல்லை என நிறுவுக.

Prove that there is no rational number whose square is 2.

12. (அ) R -ல் வரையறுக்கப்பட்ட f என்ற சார்பு தொடர்ச்சியாக இருப்பதற்கு R -ல் உள்ள G என்ற ஒவ்வொரு திறந்த கணத்திற்கு, $f^{-1}(G)$ -ம் திறந்த கணமாக இருக்கும் என்பதற்கு சமமானது என நிறுவுக.

Prove that a function f defined on R , is continuous on R iff for each open set G in R , $f^{-1}(G)$ is also an open set in R .

Or

- (ஆ) மூடிய இடைவெளி I -ல் f ஆனது தொடர்ச்சியானது எனில், f ஆனது I -ல் ஒரு சீரான தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

If f is continuous on the closed interval I , then prove that f is uniformly continuously on I .

13. (அ) f என்ற சார்பானது x_0 -இடத்து வகையிடத்தக்கது எனில், ஒவ்வொரு மெய் எண் C -க்கும், Cf என்ற சார்பும் x_0 -இடத்து வகையிடத்தக்கது என நிறுவுக.

If a function f is derivable at a point x_0 , then for each real number C , prove that the function Cf is also derivable at x_0 .

Or

- (ஆ) f மற்றும் g ஆனது I என்ற இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது எனில், fg -ம் வகையிடத்தக்கது என நிறுவுக.

If f and g are derivable on an interval I , prove that fg is also derivable.

14. (அ) லெக்ராஞ்சியின் வடிவம் மீதியுடைய டெயிலரின் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder.

Or

- (ஆ) காசியின் வடிவம் மீதியுள்ள டெயிலரின் தேற்றத்தை கூறு நிறுவுக.

State and prove Taylor's theorem with Cauchy's form of remainder.

15. (அ) f ஆனது தொகையிடத்தக்கது எனில் $|f|$ -ம் தொகையிடத்தக்கது என காட்டுக.

If f is integrable, then show that $|f|$ is integrable.

Or

- (ஆ) ஒவ்வொரு வரம்புள்ள சார்பும் தொகையிடத்தக்கதா? உன் விடையை நியாயப்படுத்துக.

Is every bounded function integrable? Justify your answer.

SECTION C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

16. $[0, 1]$ -கனமானது எண்ணிடத்தக்கதல்ல என நிறுவுக.

Prove that the set $[0, 1]$ is uncountable.

17. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ எனில் $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = lm$ என நிறுவுக.

If $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, and $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, then prove that

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = lm.$$

18. வகையிடலுக்கான எதிர்மறை சார்பு தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove inverse function theorem for derivatives.

19. லெக்ராஞ்சியின் இடை மதிப்பு தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove Lagrange's mean value theorem.

20. f -ம், g -ம் தொகையிடத்தக்கது எனில் $f + g$ -ம் தொகையிடத்தக்கது என நிரூபி.

If f and g are integrable, then prove that $f + g$ is also integrable.