(7 pages)

S.No. 5609 T **RCCSMM 3**

(For candidates admitted from 2008 to 2015 Batch)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2022.

Part III — Mathematics – Major

ANALYTICAL GEOMETRY (3D) AND INTEGRAL CALCULUS

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL the questions.

1. $2x-y+z=6$ மற்றும் $x+y+2z=7$ என்ற தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

   Find the angle between the planes $2x-y+z=6$ and $x+y+2z=7$.

2. சாய்வான இரு கோடுகளுக்கிடையிலான மீச்சிறு தூரம் காணும் சூத்திரத்தை எழுது.

   Write the formula for the shortest distance between two skew lines.

3. $2x^2+2y^2+2z^2-2x+2y-4z-5=0$ என்ற கோளத்தின் மையப் புள்ளியையும் ஆரத்தையும் காண்க.

   Find the centre and radius of the sphere $2x^2+2y^2+2z^2-2x+2y-4z-5=0$.

4. $x^2+y^2+z^2+8x-6y+4z=0$ என்ற கோளத்தின் மையப்புள்ளியில் தொடு கோட்டுத் தளத்தைக் காண்க.

   Obtain the equation of the tangent plane at the origin to the sphere $x^2+y^2+z^2+8x-6y+4z=0$.

5. $\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$ எனக் காட்டுக.

   Show that $\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx$ -ன் மதிப்பு காண்க.

   Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx$.

7. $\int_0^1\int_1^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx$ -ன் மதிப்பு காண்க.

   Evaluate $\int_0^1\int_1^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx$.

8. $\int_0^a\int_0^b\int_0^c e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx$ -ன் மதிப்பு காண்க.

   Evaluate $\int_0^a\int_0^b\int_0^c e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx$.

Define beta function.

10. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ என நிரூபி.

Prove that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

PART B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) (1, 1, 0), (1, 2, 1) மற்றும் (−2, 2, −1) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

Find the equation of the plane passing through (1, 1, 0), (1, 2, 1) and (−2, 2, −1).

Or

(ஆ) (−1, 7, 2) என்ற புள்ளி மற்றும் $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$ என்ற நேர்கோட்டின் மீது அமையும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

Find the equation of the plane containing the point (−1, 7, 2) and the line $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ என்ற கோளத்தை தொடும் எனக் காட்டுக. அதன் தொடு புள்ளியையும் காண்க.

Show that the plane $2x - 2y + z + 12 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$. Also find the point of contact.

Or

(ஆ) $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2z + 8 = 0$ மற்றும் $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y + 4z + 20 = 0$ என்ற கோளங்கள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாக வெட்டும் எனக் காட்டுக.

Show that the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2z + 8 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y + 4z + 20 = 0$ intersects each other orthogonally.

13. (அ) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\, dx = \pi$ என நிரூபி.

Prove that $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\, dx = \pi$.

Or

(ஆ) மதிப்பு காண்க $\int e^{-x} \sin^2 x \, dx$.

Evaluate $\int e^{-x} \sin^2 x \, dx$.

14. (அ) $x \geq 0, y \geq 0$ மற்றும் $x + y \leq 1$ பகுதியில் $\iint (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ காண்க.

Evaluate $\iint (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ over the reigion for which $x \geq 0, y \geq 0$ and $x + y \leq 1$.

Or

(ஆ) தொகையீட்டு வரிசையை மாற்றி $\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy \, dx$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy \, dx$ by changing the order of integration.

15. (அ) தீர்க்க $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} \theta \, d\theta$.

Solve $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} \theta \, d\theta$.

Or

(ஆ) தீர்க்க $\int_0^1 x^{3/2} (1 - x)^{5/2} \, dx$.

Evaluate $\int_0^1 x^{3/2} (1 - x)^{5/2} \, dx$.

SECTION C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

16. $3x + 4y - 5z + 1 = 0$, $5x + 12y - 13z = 0$ என்ற தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோண இருசமவெட்டியின் சமன்பாடு காண்க.

Find the bisector of the acute angle between the planes $3x + 4y - 5z + 1 = 0$ and $5x + 12y - 13z = 0$.

17. $2x - 2y + 3z - 12 = 0 = 2x + 2y + z$ மற்றும் $2x - z = 0 = 5x - 2y + 9$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையிலான மீச்சிறு தூரம் காண்க.

Find the shortest distance between the lines $2x - 2y + 3z - 12 = 0 = 2x + 2y + z$ and $2x - z = 0 = 5x - 2y + 9$.

18. $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx; \, n, m \in \mathbb{Z}^+$ -ன் குறைப்பு வாய்ப்பாட்டை நிறுவுக.

Derive the reduction formula for $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx; \, n, m \in \mathbb{Z}^+$.

$\int_0^a \int_y^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\int_0^a \int_y^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$ by changing the order of integration.

20. காமா சார்பின் வழியில் $\int_0^1 x^m (1-x^n)^{10}\, dx$ -ஐ எழுதுக. மேலும் $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10}\, dx$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Express $\int_0^1 x^m (1-x^n)^{10}\, dx$ interms of Gamma function and evaluate $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10}\, dx$.