(7 pages)

S.No. 5611 T **RCCSMM 5**

(For candidates admitted from 2008 to 2015 batch)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2022.

Part III — Mathematics – Major

SEQUENCES AND SERIES

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL questions.

1. குவியும் தொடர்வரிசையை வரையறு.

   Define Convergent sequence.

2. மாறிலி தொடர் வரிசை 1,1,1,......-ன் குவியும் மதிப்பு 1 எனக் காட்டுக.

   Show that the constant sequence 1,1,1,...... converges to 1.

3. தொடர் $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....$ ஒரு விரியும் தொடர் எனக் காட்டுக.

   Show that the series $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....$ is a divergent series.

4. $\sum a_n$ ஒரு குவியும் தொடர் எனில் $\sum a_n^2$ -ம் குவியும் தொடர் எனக் காட்டுக, இங்கு $a_n > 0$.

   Show that if $\sum a_n$ is convergent then $\sum a_n^2$, where $a_n > 0$.

5. ராபஸ் சோதனையை எழுதுக.

   State the Raabe's test.

6. விகித சோதனை முறை மூலம் $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ ஒரு விரியும் எனக் காட்டுக.

   Show that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ is a divergent series by using ratio test.

7. $(1-x)^{-4}$ -ன் விரிவாக்கத்தினை எழுதுக.

   Write the expansion of $(1-x)^{-4}$.

8. இடைவெளி $-1<x<1$ -ல் $\log\frac{1+x}{1-x}$-ன் விரியை எழுதுக.

   Find the expansion of $\log\frac{1+x}{1-x}$ in the interval $-1<x<1$.

9. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+....$ என்ற தொடரின் பொது உறுப்பை எழுதுக.

Write the general term of the series $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+....$

10. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+....$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதலை காண்க.

Find the sum to first n terms of the series $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+....$

SECTION B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $((-1)^n)$ என்ற தொடர் வரிசை ஒருங்காது என நிரூபி.

Prove that the sequence $((-1)^n)$ is not a convergent sequence.

Or

(ஆ) $a > 0$ ஒரு மெய்யென் எனில் $\lim_{n\to\infty}(a^{1/n})=1$ என நிரூபி.

Prove that $\lim_{n\to\infty}(a^{1/n})=1$ where $a > 0$ is any real number.

12. (அ) [illegible] $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-......+(-1)^n\frac{1}{n}....$ ஒரு குவியும் தொடர் என நிரூபி.

By Cauchy's general principle of convergence prove that $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-......+(-1)^n\frac{1}{n}....$ is convergent.

Or

(ஆ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n}$ என்ற தொடரின் குவிதலை காண்க.

Test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n}$.

13. (அ) $\sum(\log n)^{-n}$ -ன் குவிதலை காண்க.

Test the convergence of $\sum(\log n)^{-n}$.

Or

(ஆ) $1\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}-1\frac{1}{16}+....$ என்ற தொடர் குவியாது எனக் காட்டுக.

Show that the series $1\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}-1\frac{1}{16}+....$ is not a convergent series.

14. (அ) $|x| < 1/3$ எனில் $(1+3x)^{5/2}$ -ன் விரிவை காண்க.

Expand $(1+3x)^{5/2}$ given that $|x| < 1/3$.

Or

(ஆ) $x = 2/7$ எனும் போது $(1-x)^{31/3}$ -ன் விரிவில் மீப்பெரு உறுப்பின் மதிப்பு காண்க.

Find the greatest term in the expansion of $(1-x)^{31/3}$ when $x = 2/7$.

15. (அ) $\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{3^2.4^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2.(n+1)^2}$ -ன் கூடுதல் காண்க.

Sum the series $\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{3^2.4^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2.(n+1)^2}$.

Or

(ஆ) 6 + 9 + 14 + 23 + 40 + ... என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்பு மற்றும் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

Find the nth term and the sum to n terms of the series 6 + 9 + 14 + 23 + 40 + ...

SECTION C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

16. $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ என்ற தொடர் வரிசை குவியும் என நிரூபி.

Prove that the sequence $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ converges.

17. அதிபரவளைவு வடிவ கணிதத் தொடர்

$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2 + \ldots$ -ன் குவிதலை ஆராய்க.

Test the convergence of the hypergeometric series

$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2 + \ldots$

18. $\sum(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ என்ற தொடர் கட்டுப்பாடுகளுடன் குவியும் என நிறுவுக.

Show that the series $\sum(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ is conditionally convergent.

$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ எனில்

$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = \frac{1}{3}n(n+2)(n+7)2^{n-4}$ எனக் காட்டுக.

If n is a positive integer and

$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ then show that

$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = \frac{1}{3}n(n+2)(n+7)2^{n-4}$.

20. $\frac{2}{1.4.5} + \frac{3}{2.5.6} + \frac{4}{3.6.7} = \ldots..$ தொடரின் கூடுதல் காண்க.

Sum of infinite term of the series

$\frac{2}{1.4.5} + \frac{3}{2.5.6} + \frac{4}{3.6.7} = \ldots..$