S.No. 5613 T

RCCSMM 7

(For candidates admitted from 2008 to 2015 Batch)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2022.

Part III — Mathematics – Major

VECTOR CALCULUS AND FOURIER SERIES

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — $(10 \times 2 = 20)$

Answer ALL questions.

1. வெக்டர் $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ மற்றும் $\bar{a}$, $\bar{b}$ என்பன மாறிலி வெக்டர்கள் எனில் $\nabla(\vec{r} \cdot \vec{a}) = \bar{a}$ என நிரூபி.

   If $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ and $\bar{a}$ and $\bar{b}$ are constants vectors then prove that $\nabla(\vec{r} \cdot \vec{a}) = \bar{a}$.

2. $\bar{f} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ எனில் $\nabla \times \bar{f}$ காண்க.

   Find $\nabla \times \bar{f}$ if $\bar{f} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$.

3. தள தொகையீடு – வரையறு.

   Define surface integral.

4. மதிப்பு காண்க $\int_0^c \int_0^b \int_0^a dx\, dy\, dz$.

   Evaluate $\int_0^c \int_0^b \int_0^a dx\, dy\, dz$.

5. கிரீன்ஸ் தேற்றத்தை கூறுக.

   State Green's theorem.

6. S ஒரு மூடிய மேற்பரப்பு எனில் $\iint_S curl\, \bar{f} \cdot \hat{n}\, dS = 0$ எனக் காட்டுக.

   Show that $\iint_S curl\, \bar{f} \cdot \hat{n}\, dS = 0$ where S is any closed surface.

7. ஒற்றைச் சார்வு – வரையறு. உதாரணம் தருக.

   Define odd function. Give an example.

8. இடைவெளி $(c, c+2\pi)$-ல் $f(x)$-க்கு ஆய்லரின் சூத்திரத்தை எழுதுக.

   Write the Euler's formula for the function $f(x)$ in the interval $(c, c+2\pi)$.

9. ஃபூரியர் சைன் தொடரை $(0,\pi)$-ல் வரையறு.

Define Fourier Sine series in $(0,\pi)$.

10. $m=n$ எனில் $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ -ன் மதிப்பு காண்க

Evaluate $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ if $m=n$.

SECTION B — $(5 \times 5 = 25)$

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $xy^3z^2=4$ என்ற தளத்திற்கு $(-1,-1,2)$ புள்ளியிலமைந்த செங்குத்து அலகு வெக்டர் காண்க.

Find the unit normal to the surface $xy^3z^2=4$ at $(-1,-1,2)$.

Or

(ஆ) $\bar{f}=(2x+yz)\bar{i}+(4y+xz)\bar{j}-(6z-xy)\bar{k}$ என்ற வெக்டர் வரிச்சுற்று நெறியன் மற்றும் சுழற்சியற்றது எனக் காட்டுக.

Show that $\bar{f}=(2x+yz)\bar{i}+(4y+xz)\bar{j}-(6z-xy)\bar{k}$ is both solenoidal and irrotational.

12. (அ) $y=x^2$ மற்றும் $x=y^2$ என்ற பாவளையங்களால் அடைபடும் பகுதியின் பரப்பளவு காண்க.

Find the area of the region bounded by the parabolas $y=x^2$ and $x=y^2$.

Or

(ஆ) $x^2+y^2+z^2=1$ என்ற கோளத்தின் எட்டில் முதல் பகுதியிலமைந்த புறப்பரப்பு S மற்றும் $\bar{f}=yz\bar{i}+zx\bar{j}+xy\bar{k}$ எனில் $\iint_S \bar{f}\cdot\hat{n}\,ds$ ஐ காண்க.

Evaluate $\iint_S \bar{f}\cdot\hat{n}\,ds$ where $\bar{f}=yz\bar{i}+zx\bar{j}+xy\bar{k}$ and S is the part of the surface of the sphere $x^2+y^2+z^2=1$ which lies in the first octant.

13. (அ) $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ என்ற கோடுகளால் அடைபடும் சதுரம் C எனில் கிரீன்ஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\int_C (xy+x^2)dx+(x^2+y^2)dy$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate by Green's theorem $\int_C (xy+x^2)dx+(x^2+y^2)dy$ where C is the square formed by the lines $x=\pm 1$, $y=\pm 1$.

Or

(ஆ) $\int_C (e^x dx + 2y\,dy - dz)$-ன் மதிப்பு காண்க. இங்கு C என்ற வளைவரை $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$.

Evaluate $\int_C (e^x dx + 2y\,dy - dz)$ where C is the curve $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$.

14. (அ) $-\pi < x < \pi$ இடைவெளியில் $f(x) = x$ -ன் ஃபூரியர் தொடரை காண்க.

Find the Fourier series for $f(x) = x$ in the interval $-\pi < x < \pi$.

Or

(ஆ) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < l \\ a, & l < x < 2l \end{cases}$ -ன் ஃபூரியர் தொடரை $(0, 2l)$ இடைவெளியில் காண்க.

Find the Fourier series in the interval $(0, 2l)$ for the function $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < l \\ a, & l < x < 2l \end{cases}$.

15. (அ) இடைவெளி $(0, \pi)$-ல் $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ -ன் கொசைன் தொடரை காண்க.

Find a cosine series in the range 0 to π for $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$.

Or

(ஆ) இடைவெளி $0 < x < 4$ $f(x) = 3x - 2$ -ன் சைன் மற்றும் கொசைன் தொடரை காண்க.

Find a sine and cosine series for the function $f(x) = 3x - 2$ in the interval $0 < x < 4$.

SECTION C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

16. (அ) $P(x, y, z)$ புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\bar{r}$ எனில் grad $r^n = n\,r^{n-2}\,\bar{r}$ என நிரூபி.

(ஆ) $\nabla f(r) = \left(\dfrac{f'(r)}{r}\right)\bar{r}$ என நிரூபி.

(a) If $\bar{r}$ is the position vector of any point $P(x, y, z)$, then prove that grad $r^n = n r^{n-2} \bar{r}$.

(b) Prove that $\nabla f(r) = \left(\frac{f'(r)}{r}\right)\bar{r}$.

17. மதிப்பு காண்க : $\iint_D x^2 y^2 \, dx \, dy$. இங்கு D என்பது $x^2 + y^2 \le 1$ என்ற வட்டத் தகடு.

Evaluate $\iint_D x^2 y^2 \, dx \, dy$ where D is the circular disc $x^2 + y^2 \le 1$.

18. $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ என்ற கன சதுரத்தில் வெக்டர் $\bar{f} = 4xz\,\bar{i} - y^2\,\bar{j} + yz\,\bar{k}$ -க்கு காஸ்விரிதல் தேற்றத்தை சரிபார்.

Verify Gauss divergence theorem for $\bar{f} = 4xz\,\bar{i} - y^2\,\bar{j} + yz\,\bar{k}$ taken over the cube bounded by $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

19. $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$ என $-\pi \le x \le \pi$ -ல் ஃபூரியர் தொடரை வருவி. மேலும் $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ -ன் மதிப்பு காண்.

Show that the Fourier series of x^2 in the interval $-\pi \le x \le \pi$ is $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$ and hence deduce the value of $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$

20. இடைவெளி $(0, \pi)$-ல் $f(x) = x \sin x$ -ன் அரைவீச்சு கொசைன் தொடரை காண்க.

Find the half-range cosine series for the function $f(x) = x \sin x$ in the interval $(0, \pi)$.