(6 pages)

S.No. 5632 T **16 SCCMM 5**

(For candidates admitted from 2016-2017 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2022.

Part III — Mathematics – Major

SEQUENCES AND SERIES

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — $(10 \times 2 = 20)$

Answer ALL questions.

1. ஓரியல்பான ஏறு தொடர் வரிசையை வரையறு எடுத்துக்காட்டு தருக.

   Define monotonic increasing sequence. Give an example.

2. அலையும் தொடர் வரிசையை வரையறு. எடுத்துக்காட்டு தருக.

   Define Oscillating sequence with an example.

3. $(a_n) \to a$ மற்றும் $k \in \mathbb{R}$ எனில் $(k\, a_n) \to ka$ என நிறுவுக.

   If $(a_n) \to a$ and $k \in \mathbb{R}$ then prove that $(k\, a_n) \to ka$.

4. $\lim\limits_{h \to \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + ... + \frac{n^2}{n^3} \right)$ மதிப்பு காண்க.

   Evaluate $\lim\limits_{h \to \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + ... + \frac{n^2}{n^3} \right)$.

5. $\lim\limits_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$ என நிரூபி.

   Show that $\lim\limits_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$.

6. தொடர் வரிசை (n) ஒரு கோஷி தொடர் வரிசை இல்லை என நிறுவுக.

   Prove that the sequence (n) is not a Cauchy sequence.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ஒரு விரியும் தொடர் எனக் காட்டுக.

   Show that $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is a divergent series.

8. ஒப்பீட்டு சோதனையை எழுதுக.

   Write the comparison test.

9. டி-ஆல்ம்பர்ட்-ன் விகித சோதனையை எழுதுக.

   State the D' Alembert's ratio test.

10. ஒரு தொடரின் அறுதி (absolute) குவிதலை வரையறு. எடுத்துக்காட்டு தருக.

    Define absolute convergent of series. Give an example.

Answer ALL questions choosing either (a) or (b)

11. (அ) ஒரு தொடர் வரிசை இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் குவியாது என நிரூபி.

Prove that a sequence cannot converge to two different limits.

Or

(ஆ) $-\infty$-ல் விரியும் எல்லா தொடர் வரிசை (a_n)-ம் மேல் எல்லையைப் பெற்றிருக்கும் ஆனால் கீழ் எல்லையைப் பெற்றிருக்காது என நிரூபி.

Prove that any sequence (a_n) diverging to $-\infty$ is bounded above but note bounded below.

12. (அ) $(a_n)\to l, (b_n)\to l$ மற்றும் $a_n < c_n < b_n$ $\forall n$ எனில் $(c_n)\to l$ என நிரூபி.

If $(a_n)\to l, (b_n)\to l$ and $a_n < c_n < b_n$ for all n, then prove that $(c_n)\to l$

Or

(ஆ) $a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!}$ எனில் $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$-ன் மதிப்பு 2 மற்றும் 3-க்கு இடையில் அமையும் என நிரூபி.

Let $a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!}$. Show that $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ exists and lies between 2 and 3.

... நிரூபி.

State and prove Cauchy's second limit theorem.

Or

(ஆ) $\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)......(n+n)]^{1/n} \to 4/e$ என நிரூபி.

Prove that

$\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)......(n+n)]^{1/n} \to 4/e$.

14. (அ) $\Sigma\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ தொடரின் ஒருங்குதலை ஆராய்க.

Discuss the convergence of the series $\Sigma\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$.

Or

(ஆ) $\Sigma\frac{1+2+.....+n}{n^3+1}$-ன் ஒருங்குதலை ஆராய்க.

Discuss the convergence of the series $\Sigma\frac{1+2+.....+n}{n^3+1}$.

[P.T.O.]

15. (அ) $\Sigma\sqrt{\frac{n}{n+1}}x^n$ –ன் குவிதலை ஆராய்க.

Test the convergence of $\Sigma\sqrt{\frac{n}{n+1}}x^n$.

Or

(ஆ) $\Sigma\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ ஒரு முழுவதுமாக குவியும் (absolutely) தொடர் எனக் காட்டுக.

Show that the series $\Sigma\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ converges absolutely for all values of x.

SECTION C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions

16. (அ) (a_n) ஒரு ஓரியல்பான தொடர் வரிசை எனில் $\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}$ –ம் ஓரியல்பானது என நிரூபி.

(ஆ) $((-1)^n)$ என்ற தொடர் வரிசை குவியும் தொடர் வரிசையல்ல என நிரூபி.

(a) If (a_n) is a monotonic sequence then prove that $\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}$ is also monotonic.

(b) Prove that the sequence $((-1)^n)$ is not convergent.

17. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ என நிரூபி.

Show that $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

18. கோசியின் முதல் எல்லை மதிப்பு தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Cauchy's first limit theorem.

19. $\Sigma\frac{1}{n^p}$ என்ற தொடர் $p>1$ எனும் போது குவியும் மற்றும் $p\le 1$ எனில் விரியும் தொடர் என நிறுவுக.

Prove that the series $\Sigma\frac{1}{n^p}$ converges if $p>1$ and diverges if $p\le 1$

20. $(x>0)$ எனில் $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$ என்ற தொடரின் குவிதலை விவரி.

Explain the convergence of the series

$$x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots(x>0)$$