(7 pages)

S.No. 5636 T **16 SCCMM 7**

(For candidates admitted from 2016–2017 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2022.

Part III — Mathematics – Major

VECTOR CALCULUS AND FOURIER SERIES

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL the questions.

1. $\phi = 3x^2y - y^3z^2$ எனில் (1, –1, 2) புள்ளியில் grad ϕ காண்க.

   Find grad ϕ at (1, –1, 2) if $\phi = 3x^2y - y^3z^2$.

2. வரையறு : வரிச்சுற்று நெரியன்.

   Define solenoidal vector.

3. $\overline{f} = x^2y\overline{i} + 2xz\overline{j} + xy\overline{k}$ எனில் $div\,\overline{f}$ காண்க.

   Find $div\,\overline{f}$ where $\overline{f} = x^2y\overline{i} + 2xz\overline{j} + xy\overline{k}$.

4. காப்பு மண்டலத்தை வரையறு.

   Define conservative force field.

5. ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தை எழுதுக.

   State Stoke's theorem.

6. C என்பது $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டம் எனில் $\int_c (xdy) - ydx)$–ஐ காண்க.

   Evaluate $\int_c (xdy) - ydx)$, where C is the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

7. ஒற்றைச் சார்பு – வரையறு.

   Define odd function.

8. $(C, C+2\pi)$ இடைவெளியில் $f(x)$–ன் ஃபூரியர் தொடரை வரையறு.

   Define Fourier series of $f(x)$ in $(C, C+2\pi)$

9. இடைவெளி $(0,\pi)$–ல் $f(x) = K$–ன் சைன் தொடரை காண்க.

   Find the sine series of $f(x) = K$ in $(0,\pi)$.

10. $f(x) = \begin{cases} Kx & 0 \le x < l/2 \\ K(l-x) & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$ என்ற சார்பின் கொசைன் தொடரில் உள்ள a_0–ஐ காண்க.

    Find a_0 in the cosine series of $f(x) = \begin{cases} Kx & 0 \le x < l/2 \\ K(l-x) & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$

SECTION B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) புள்ளி (–1, –1, 2)–ல் $xy^3z^2 = 4$–ன் செங்குத்து அலகு வெக்டரை காண்க.

Find the unit normal to the surface $xy^3z^2 = 4$ at (–1, –1, 2).

Or

(ஆ) $\varphi = r^2e^{-r}$ எனில் grad $\varphi = (2-r)e^{-r}\overline{r}$ எனக்காட்டுக.

If $\varphi = r^2e^{-r}$ show that grad $\varphi = (2-r)e^{-r}\overline{r}$.

12. (அ) grad $\varphi = (y^2 - 2xyz^3)\overline{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\overline{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\overline{k}$ எனில் φ–ஐ காண்க.

Find φ if

$$\text{grad } \varphi = (y^2 - 2xyz^3)\overline{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\overline{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\overline{k}$$

Or

(ஆ) $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ என்ற வட்டத்தின் மீது (2, 0, 0) என்ற புள்ளியிலிருந்து (0, 2, 0) வரை இயங்கும் ஒரு பொருள் மீது $-xy\overline{i} + y^2\overline{j} + z\overline{k}$ என்ற விசை செயல்படும் போது ஏற்படும் வேலைத்திறனைக் காண்க.

Find the work done by the force $-xy\overline{i} + y^2\overline{j} + z\overline{k}$ in moving a particle over the circular path $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ from (2, 0, 0) to (0, 2, 0).

13. (அ) கிரீன்ஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\int_c [(xy - x^2)dx + x^2ydy]$–ன் மதிப்பு காண்க. இங்கு C என்பது $y = 0, x = 1, y = x$–ஆல் ஆன மூடிய பகுதி ஆகும்.

Use Green's theorem to evaluate $\int_c [(xy - x^2)dx + x^2ydy]$ along the closed curve C formed by $y = 0, x = 1$ and $y = x$.

Or

(ஆ) காஸ் விரிதல் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\iint_s \overline{f}.\hat{n}\, ds$–ஐ காண்க. இங்கு $\overline{f} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$ மற்றும் S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் தளம் ஆகும்.

Use Gauss divergence theorem to evaluate $\iint_s \overline{f}.\hat{n}\, ds$ where $\overline{f} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$ and S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

14. (அ) $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{\pi}, & -\pi \le x \le 0 \\ 1 - \frac{2x}{\pi}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ -ன் ஃபூரியர் தொடரை காண்க.

Find the Fourier series for the function $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{\pi}, & -\pi \le x \le 0 \\ 1 - \frac{2x}{\pi}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$.

Or

(ஆ) $f(x) = 2x - x^3$ -ன் ஃபூரியர் தொடரை இடைவெளி (0, 3)-ல் காண்க.

Find the Fourier series for the function $f(x) = 2x - x^3$ in the interval (0, 3).

15. (அ) இடைவெளி $(0, l)$-ல் $f(x) = x(l - x)$-ன் சைன் மற்றும் கொசைன் தொடரை காண்க.

Find the Fourier sine and cosine series for the function $f(x) = x(l - x)$ in the interval $(0, l)$.

Or

(ஆ) $f(x) = x \sin x$ -ன் சைன் தொடரை இடைவெளி $(0, \pi)$-ல் காண்க.

Find the sine series for the function $f(x) = x \sin x$ in the interval $(0, \pi)$.

SECTION C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

16. $div(r^n \bar{r}) = (n + 3)r^n$ என நிரூபி. அதிலிருந்து $r^n \bar{r}$ ஒரு வரிச்சுற்று நெரியனாக அமைவதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $n = -3$ என நிரூபி.

Prove that $div(r^n \bar{r}) = (n + 3)r^n$. Deduce that $r^n \bar{r}$ is solenoidal if and only if $n = -3$

17. $\bar{f} = yz\bar{i} + zx\bar{j} + xy\bar{k}$ மற்றும் S என்பது எட்டில் முதல் பாதி மற்றும் $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்ற கோளம் சேர்ந்த பகுதி எனில் $\iint_s \bar{f}.ds$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\iint_s \bar{f}.ds$, where $\bar{f} = yz\bar{i} + zx\bar{j} + xy\bar{k}$ and S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ that lies in the first octant.

18. $x = \pm a$, $y = 0$, $y = b$ ஆல் ஆன செவ்வகத்தால் அடைபடும் C பகுதியில் $\bar{f} = (x^2 + y^2)\bar{i} - 2xy\bar{j}$ க்கு ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தை சரிபார்.

Verify Stoke's theorem for $\bar{f} = (x^2 + y^2)\bar{i} - 2xy\bar{j}$ taken around the rectangle, bounded by the C lines $x = \pm a$, $y = 0$, $y = b$.

19. $f(x) = x + x^2$ என்ற சார்பின் ஃபூரியர் தொடரை இடைவெளி $(-\pi, \pi)$–ல் காண்க.

Find the Fourier series for the function $f(x) = x + x^2$ in the interval $(-\pi, \pi)$.

20. இடைவெளி $(0, \pi)$–ல் $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ –ன் கொசைன் தொடரைக் காண்க.

Find a cosine series in the range 0 to π for $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$