

(6 pages)

S.No. 5642 T

16 SCCMM 10

(For candidates admitted from 2016-2017 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2022.

Part III — Mathematics — Major

REAL ANALYSIS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL questions.

1. அனைத்தும் $x, y \in R$ -ற்கும் $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ என நிறுவுக.
For all $x, y \in R$, show that $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
2. வரையறு எண்ணிடத்தக்க கணங்கள்.
Define countable set.
3. $f(x) = [x]$ எனில் $f(n+0)$, $f(n-0)$ ஆகியவற்றை கண்டுபிடி.
If $f(x) = [x]$, find $f(n+0)$ and $f(n-0)$.

4. ஒரே சீரான தொடர்ச்சியான சார்புக்கு உதாரணம் தருக.
Give an example of a uniformly continuous function.
5. வரையறு : வகைக்கெழு சார்பு.
Define derivative of a function.
6. $f(x) = |x|$ என்ற சார்பு $x = 0$ வில் வகையிடத்தக்கதல்ல எனக் காண்பி.
Show that the function $f(x) = |x|$ is not differentiable at $x = 0$.
7. லக்ரான்ஜியின் இடைநிலை மதிப்புத் தேற்றத்தை எழுதுக.
State Lagrange's mean value theorem.
8. $f(x)$ -ன் மெக்லாரின் தொடர் விரிவை எழுதுக.
Write down the Maclaurin's series expansion of $f(x)$.
9. ரீமான் தொகையீட்டினை வரையறு.
Define Riemann integral.
10. தொகையிடல் இயற்கணிதத்தின் அடிப்படை தேற்றத்தை எழுதுக.
Write the fundamental theorem of Integral calculus.

SECTION B — (8 × 5 = 40)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b)

11. (அ) நிறுவுக $|x + y| \leq |x| + |y| \forall x, y \in R$.

Prove that $|x + y| \leq |x| + |y| \forall x, y \in R$.

Or

- (ஆ) எண்ணிடத்தக்க கணத்தின் ஒவ்வொரு உட்கணமும் எண்ணிடத்தக்கது என நிறுவுக.

Prove that every subset of a countable set is countable.

12. (அ) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ எனில் $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + m$ என நிறுவுக.

If $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ and $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, Prove that $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + m$.

Or

- (ஆ) f ஆனது I என்ற இடைவெளியில், கீரானத் தொடர்ச்சியாக உள்ளது எனில் f ஆனது I -யின் மீது தொடர்ச்சியாக உள்ளது என நிறுவுக.

If f is uniformly continuous on an interval I , then prove that f is continuous on I .

3

S.No. 5642 T

13. (அ) $x \in I$ -ல் f, g வகையிடத்தக்கவை எனில் x -ல் fg வகையிடத்தக்கவை என நிறுவுக.

If f and g are derivable at $x \in I$, then prove that fg is derivable.

Or

- (ஆ) x_0 என்ற புள்ளியில் f வகையிடத்தக்கது மற்றும்

$$f(x_0) \neq 0 \quad \text{என்க,} \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2} \quad \text{என}$$

நிறுவுக.

Let f be derivable at x_0 and $f(x_0) \neq 0$. Then

$$\text{prove that that } \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}.$$

14. (அ) ரோல்ஸ் தேற்றத்தினை கூறி நிறுவுக.

State and prove Rolle's theorem.

Or

- (ஆ) $\cos x$ -ன் அடுக்குத் தொடர் விரிவை காண்க.

Find the power series expansion of $\cos x$.

4

S.No. 5642 T
[P.T.O.]

15. (அ) $[a, b]$ -லுள்ள ஒரீயல்புச் சார்பு $[a, b]$ -ல் தொகையிடல் காணத்தக்கது என நிறுவுக.

Prove that the monotonic function on $[a, b]$ is integrable on $[a, b]$.

Or

- (ஆ) வழக்கமான குறியீடுகளுடன், $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$ என நிறுவுக.

With usual notations, prove that

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

SECTION C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

16. $[0, 1]$ என்ற கணமானது எண்ணிடத்தக்கதல்ல என நிறுவுக.

Prove that the set $[0, 1]$ is uncountable.

17. f ஆனது R இல் வரையறுக்கப்பட்டதும் தொடர்ச்சியானதும் ஆன சார்பு $\Leftrightarrow f^{-1}(G)$ ஆனது அனைத்து R -ல் உள்ள திறந்த கணம் G -க்கும் திறந்த கணமாகவும் அமையும் என நிரூபி.

A function f is defined on R is continuous on R $\Leftrightarrow$ for each open set G in R , $f^{-1}(G)$ is an open set in R .

18. வகையீடுக்களுக்கான டார்பாக்ஸின் தேற்றத்தை கூறி நிரூபிக்க.

State and prove Darboux's theorem for derivatives.

19. காஷி வடிவ மீதி கொண்ட டெய்லர் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Taylor's theorem with Cauchy's form of remainder.

20. தொகை நுண்கணிதத்தின் முதல் இடை மதிப்புத் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove first mean value theorem of Integral calculus.