(7 pages)

S.No. 5647 T **16 SCCMM 13**

(For candidates admitted from 2016–2017 Batch)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2022.

Part III — Mathematics – Major

COMPLEX ANALYSIS

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL the questions.

1. $f(z)=\bar{z}$ என்ற சார்பு வகையிடத்தக்கது அல்ல என நிறுவுக.

   Show that the function $f(z)=\bar{z}$ is nowhere differentiable.

2. லாப்லாசின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

   State the Laplace's equation.

3. இருபடி உருமாற்றத்தில் மாறாத புள்ளிகளை வரையறு.

   Define the fixed points of the bilinear transformation.

4. குறுக்கு விகிதத்தை வரையறு.

   Define the cross ratio.

5. கோசியின் தேற்றத்தை எழுதுக.

   State Cauchy's theorem.

6. தீர்க்க : $\int_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz$, $|z|=2$.

   Solve : $\int_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz$ where $|z|=2$.

7. டெய்லரின் தேற்றத்தை எழுதுக.

   State Taylor's theorem.

8. தனிமைப்படுத்தப்பட்ட சிறப்புப் புள்ளி – வரையறு.

   Define isolated singularity.

9. எச்சம் – வரையறு.

   Define residue.

10. காசியின் எச்ச தேற்றத்தை எழுதுக.

    State Cauchy's residue theorem.

SECTION B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z\,\mathrm{Re}\,z}{|z|} & \text{எனில் } z\neq 0\\ 0 & \text{எனில் } z=0\end{cases}$, $f(z)$ என்ற சார்பு $z=0$-ல் தொடர்ச்சியானது என்றும் ஆனால் $z=0$-ல் வகையிடத்தக்கது அல்ல என்றும் நிறுவுக.

Prove that $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z\,\mathrm{Re}\,z}{|z|} & if\ z\neq 0\\ 0 & if\ z=0\end{cases}$, is continuous at $z=0$ but not differentiable at $z=0$.

Or

(ஆ) $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}$ எனில் $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}=4\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}$ என நிரூபி.

If $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}$, prove that $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}=4\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}$.

12. (அ) $z=0,-i,-1$ என்ற புள்ளிகளை $w=i,1,0$ என்ற புள்ளிகளின் மேல் பதிக்கும் இருபடி உருமாற்றத்தைக் காண்க.

Find the bilinear transformation which maps the points $z=0,-i,-1$ into $w=i,1,0$ respectively.

Or

(ஆ) $w=\dfrac{5-4z}{4z-2}$ என்ற உருமாறி $|z|=1$ என்ற வட்டத்தை மையப்புள்ளி $-\dfrac{1}{2}$ ஆக உள்ள வட்டத்திற்கு மாறும் எனக் காட்டுக.

Show that the transformation $w=\dfrac{5-4z}{4z-2}$ maps the unit circle $|z|=1$ into a circle of radius unity and centre $-\dfrac{1}{2}$.

13. (அ) $\int_{-C} f(z)\,dz=-\int_{C} f(z)\,dz$ என நிரூபி.

Prove that $\int_{-C} f(z)\,dz=-\int_{C} f(z)\,dz$.

Or

[P.T.O.]

(ஆ) C என்பது $|z| = 2$ எனில் $\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ where C is the circle $|z| = 2$.

14. (அ) $z = -2$ மீது $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ -ன் லாரன்ட் தொடரை வருவி.

Find the Laurent's series for $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ about $z = -2$.

Or

(ஆ) ரீமானின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Riemann's theorem.

15. (அ) $\frac{1}{z - \sin z}$ -ன் துருவங்களில் எச்சத்தைக் காண்க.

Find the residue of $\frac{1}{z - \sin z}$ at its poles.

Or

(ஆ) கோண வீச்சு தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Argument theorem.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$)

Answer any THREE questions.

16. கோஷி ரீமானின் துருவ வடிவ சமன்பாடுகளை வருவி.

Derive Cauchy-Riemann equations in polar co-ordinates.

17. மெய் அச்சினை $|w| = 1$ என்ற ஓரலகு வட்டமாக மாற்றும் இரட்டை ஒருபடி உருமாற்றத்தை $w = e^{i\lambda}\left[\frac{z-\alpha}{z+\overline{\alpha}}\right]$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம் என நிறுவுக. (λ – மெய்யெண்) மேலும் இவ்உருமாற்றம் $\text{Im}\, z \geq 0$ என்ற மேல் அரைத்தளத்தை $|w| \leq 1$ என்ற அலகு வட்டத்தகட்டாக உருமாற்ற தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\text{Im}\, \alpha > 0$ என நிறுவுக.

Prove that any bilinear transformation which maps the real axis onto unit circle $|w| = 1$ can be written in the form $w = e^{i\lambda}\left[\frac{z-\alpha}{z+\overline{\alpha}}\right]$, where λ is real. Further this transformation maps the upper half plane $\text{Im}\, z \geq 0$ onto the unit circular disc $|w| \leq 1$ if and only if $\text{Im}\, \alpha > 0$.

18. கோசியின் தொகையீட்டு சூத்திரத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Cauchy's integral formula.

19. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{(z+2)\,(z+3)}$ என்ற சார்பின் டெய்லரின் தொடரை $|z|<2$ -ல் காண்க.

Find the Taylor's series to represent $f(z)=\dfrac{z^2-1}{(z+2)\,(z+3)}$ in $|z|<2$.

20. கான்டூர் தொகையிடுதலில் $\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{2+\cos\theta}$ -ன் மதிப்பு காண்க.

Using Contour integration, find the value of $\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{2+\cos\theta}$.