(8 pages)

S.No. 5925 T **SYM 2**

(For candidates admitted from 2000–2001 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2022.

Part III – Allied

MATHEMATICS – II, ALGEBRA, ANALYTICAL GEOMETRY OF THREE DIMENSIONS AND TRIGONOMETRY

Time : Three hours Maximum : 100 marks

PART A — $(10 \times 2 = 20)$

Answer ALL questions.

1. நிரூபி : $(\log 2) - \frac{1}{2!}(\log 2)^2 + \frac{1}{3!}(\log 2)^3 - \ldots\ldots = \frac{1}{2}$.

   Prove : $(\log 2) - \frac{1}{2!}(\log 2)^2 + \frac{1}{3!}(\log 2)^3 - \ldots\ldots = \frac{1}{2}$.

2. e^{a+bx} ல் x^n ன் குணகம் காண்க.

   Find the coefficient of x^n in e^{a+bx}.

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \theta & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$ ஒரு ஒரலகு அணி என நிரூபி.

   Prove that $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \theta & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$ is unitary.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ ன் சிறப்பு மூலங்களை காண்

   Find the characteristics roots of $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$, மற்றும் $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ ஆகிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் உள்ளன என நிரூபி.

   Show that the lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ and $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ are coplanar.

6. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 7x + 8y - 4z - 8 = 0$ என்ற கோளத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.

   Find the centre and radius of the sphere $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 7x + 8y - 4z - 8 = 0$.

7. $\cosh\theta$ வை $\cos\theta$, $\sin\theta$ வின் படிகளில் விரிவாக்கம் எழுதுக.

   Write the expansion of $\cosh\theta$ in terms of powers of $\cos\theta$ and $\sin\theta$.

8. மதிப்பிடுக $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

   Evaluate $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

9. நிரூபி $sinh\ 2x = 2sinh x\ cosh x$.

Prove $sinh\ 2x = 2sinh x\ cosh x$.

10. நிரூபி $cosh(x+y) = cosh x\, cosh y + sinh x\, sinh y$.

Prove $cosh(x+y) = cosh x\, cosh y + sinh x\, sinh y$.

PART B — (5 × 6 = 30)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) நிரூபி

$$log\frac{n+1}{n-1} = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^5 + ...$$

Prove

$$log\frac{n+1}{n-1} = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^5 + ...$$

Or

(ஆ) கூடுதல் காண்க $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)!}$.

Sum the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)!}$.

12. (அ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க.

Find the rank of $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Or

(ஆ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் எதிர்மறை காண்க.

Find the inverse of $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

13. (அ) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ மற்றும் $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடையேயான மீச்சிறு தூரம் காண்க.

Find the shortest distance between the lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ and $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$.

Or

(ஆ) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 2z - 5 = 0$, $\pi : 5x - 2y + 4z + 7 = 0$ வை பெரிய வட்டமாக கொண்ட கோளத்தில் சமன்பாடு காண்க.

Find the equation of the sphere having the circle $S: x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 2z - 5 = 0$, $\pi: 5x - 2y + 4z + 7 = 0$ as a great circle.

14. (அ) நிரூபி $16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$.

Prove $16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$

Or

(ஆ) $\frac{\sin x}{x} = \frac{863}{864}$ எனில் x ன் மதிப்பை தோராயமாக காண்க.

If $\frac{\sin x}{x} = \frac{863}{864}$ find the approximate value of x.

15. (அ) $\sin^{-1}x$ ஐ logarithmic சார்பில் காண்க.

Find $\sin^{-1}x$ interms of logarithmic functions.

Or

(ஆ) $x + iy = \cos(A + iB)$ எனில் $(1+x)^2 + y^2 = (\cosh B + \cos A)^2$ என நிரூபி.

If $x + iy = \cos(A + iB)$ prove that $(1+x)^2 + y^2 = (\cosh B + \cos A)^2$.

PART C — (5 × 10 = 50)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) கூடுதல் காண்க $\frac{4}{2.4} + \frac{4.5}{2.4.6} + \frac{4.5.6}{2.4.6.8} + \ldots\ldots$.

Sum the series $\frac{4}{2.4} + \frac{4.5}{2.4.6} + \frac{4.5.6}{2.4.6.8} + \ldots\ldots$.

Or

(ஆ) நிரூபி $\frac{2.3}{3!} + \frac{3.5}{4!} + \frac{4.7}{5!} + \ldots\ldots = 2e - \frac{7}{2}$.

Prove $\frac{2.3}{3!} + \frac{3.5}{4!} + \frac{4.7}{5!} + \ldots\ldots = 2e - \frac{7}{2}$.

17. (அ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்பு மற்றும் ஐகன் வெக்டர்கள் காண்க.

Find the eigen values and eigen vectors of $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Or

(ஆ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் எதிர்மறையை கெய்லி ஹேமில்டன் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி காண்க.

Using Cayley Hamilton theorem find the inverse of $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

18. (அ) $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y+9}{-16} = \dfrac{z-10}{7}$ மற்றும் $\dfrac{x-15}{3} = \dfrac{y-29}{8} = \dfrac{z-5}{-5}$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள மிகச்சிறிய தூரத்தையும் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

Find the shortest distance and the equation of the lines $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y+9}{-16} = \dfrac{z-10}{7}$ and $\dfrac{x-15}{3} = \dfrac{y-29}{8} = \dfrac{z-5}{-5}$.

Or

(ஆ) (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) மற்றும் (0, 0, 1) வழியாக செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

Find the equation of the sphere passing through the points (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) and (0, 0, 1).

19. (அ) நிரூபி

$$\frac{\sin 8\theta}{\sin\theta} = 128\cos^7\theta - 192\cos^5\theta + 80\cos^3\theta - 8\cos\theta$$

Prove

$$\frac{\sin 8\theta}{\sin\theta} = 128\cos^7\theta - 192\cos^5\theta + 80\cos^3\theta - 8\cos\theta$$

Or

(ஆ) நிரூபி

$$\sin^3\theta\cos^4\theta = \frac{-1}{2^6}[\sin 7\theta + \sin 5\theta - 3\sin 3\theta - 3\sin\theta]$$

Prove

$$\sin^3\theta\cos^4\theta = \frac{-1}{2^6}[\sin 7\theta + \sin 5\theta - 3\sin 3\theta - 3\sin\theta]$$

20. (அ) $n = \log\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right)$ எனில்

(i) $\tanh\dfrac{4}{2} = \tan\dfrac{\theta}{2}$ (ii) $\theta = -i\log\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{i4}{2}\right)$

நிரூபி,

If $n = \log\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right)$ show that

(i) $\tanh\dfrac{4}{2} = \tan\dfrac{\theta}{2}$ (ii) $\theta = -i\log\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{i4}{2}\right)$

Or

(ஆ) $\cos(\theta + i\phi) = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ எனில் $\cos 2\theta + \cosh 2\phi = 2k^2$ நிரூபி

If $\cos(\theta + i\phi) = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ prove that $\cos 2\theta + \cosh 2\phi = 2k^2$.