

(8 pages)

S.No. 5924 T

SYM 1

(For candidates admitted from 2000-2001 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2022.

Part III — Allied

MATHEMATICS I — CALCULUS AND VECTOR
CALCULUS

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

PART A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL questions.

1. $y = e^{5x+3}$ எனில் y_n -ஐக் காண்க.

If $y = e^{5x+3}$, find y_n .

2. $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$ எனக் காட்டுக.

If $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ show that $\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$.

3. $u = \log(x+y)$ மற்றும் $x = \cos t$, $y = t^2$ எனில் $\frac{du}{dt}$ காண்க.

Find $\frac{du}{dt}$, when $u = \log(x+y)$, where $x = \cos t$, $y = t^2$.

4. $x+y=u$, $y=uv$ எனில் $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ காண்க.

If $x+y=u$, $y=uv$, find $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

5. மதிப்பிடுக : $\int \frac{dx}{x^2+8x-7}$.

Evaluate : $\int \frac{dx}{x^2+8x-7}$.

6. மதிப்பிடுக : $\int \sqrt{x^2+2x+10} dx$.

Evaluate : $\int \sqrt{x^2+2x+10} dx$.

7. $I_n = \int x^n e^{ax} dx$ -க்கு குறைப்புச் சூத்திரத்தை நிறுவுக.

Establish a reduction formula for $I_n = \int x^n e^{ax} dx$.

8. மதிப்பிடுக: $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x dx$.

Evaluate: $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x dx$.

9. $\vec{f} = xz^3 \vec{i} - 2x^2 yz \vec{j} + 2yz^4 \vec{k}$ எனில் $(1, -1, 1)$ என்ற புள்ளியிடத்து $\text{div } \vec{f}$ காண்க.

Compute $\text{div } \vec{f}$ at $(1, -1, 1)$ where $\vec{f} = xz^3 \vec{i} - 2x^2 yz \vec{j} + 2yz^4 \vec{k}$.

10. ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தை எழுதுக.
State Stoke's theorem.

PART B — (5 × 6 = 30)

Answer ALL questions.

11. (அ) $y = \frac{3x-1}{x(x+1)(x-1)}$ ன் n வது வகைக்கெழு காண்க.

Find the n^{th} derivative of $y = \frac{3x-1}{x(x+1)(x-1)}$.

Or

(ஆ) $y = \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x$ எனில் $(1-x^2)y_1 + xy - 1 + x^2 = 0$ என நிறுவுக.

If $y = \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x$, prove that $(1-x^2)y_1 + xy - 1 + x^2 = 0$.

3

S.No. 5924 T

12. (அ) $xy = 30$ என்ற வளைவரைக்கு $(3, 10)$ என்ற புள்ளியிடத்து வளைவு ஆரம் காண்க.

Find the radius of curvature of the curve $xy = 30$ at the point $(3, 10)$.

Or

(ஆ) $u = x^3 y^4 z^2$ மற்றும் $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$ எனில் $\frac{du}{dt}$ காண்க.

If $u = x^3 y^4 z^2$ where $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$, find $\frac{du}{dt}$.

13. (அ) மதிப்பிடுக: $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Evaluate: $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Or

(ஆ) மதிப்பிடுக: $\int \frac{dx}{4+5\cos x}$.

Evaluate: $\int \frac{dx}{4+5\cos x}$.

14. (அ) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ எனக் காட்டுக.

Show that $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$.

Or

4

S.No. 5924 T

(ஆ) $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx$, n -மிகை எண் எனில்

$$I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \text{ என நிறுவுக.}$$

If $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx$ and n is a positive integer, prove that

$$I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}.$$

15. (அ) $\nabla \phi = 2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}$ மற்றும் $\phi(1, -2, 2) = 4$ எனில் ϕ -க் காண்க.
If $\nabla \phi = 2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}$ find ϕ if $\phi(1, -2, 2) = 4$.

Or

(ஆ) $\vec{F} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$, C என்பது $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ என்ற வில்லில் $(0, 0, 0)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $(1, 1, 1)$ என்ற புள்ளி வரையிலான பகுதி எனில் $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ன் மதிப்புக் காண்க.

If $\vec{F} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$, evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ from the point $(0, 0, 0)$ to $(1, 1, 1)$ where C is the curve $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

PART C — ($5 \times 10 = 50$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $y = \cos(m \cos^{-1} x)$ எனில்,
 $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$ எனக் காட்டுக.
If $y = \cos(m \cos^{-1} x)$, show that $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$.
Or

(ஆ) $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ எனில்

$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2y_n = 0$ எனக் காட்டுக.

If $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$, show that $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2y_n = 0$.

17. (அ) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ என்ற வளைவரைக்கு வளைவு ஆரம் காண்க.
Find the radius of curvature of the curve $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.

Or

(ஆ) $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$ எனில்

$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ காண்க.

If $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$, find

$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$.

18. (அ) மதிப்பிடுக : $\int \frac{6x+5}{\sqrt{6+x-2x^2}} dx$.

Evaluate : $\int \frac{6x+5}{\sqrt{6+x-2x^2}} dx$.

Or

(ஆ) மதிப்பிடுக : $\int \sqrt{\frac{5-x}{x-2}} dx$.

Evaluate : $\int \sqrt{\frac{5-x}{x-2}} dx$.

19. (அ) மதிப்பிடுக : $\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin x + \cos x}$.

Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin x + \cos x}$.

Or

(ஆ) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ எனில்,

$2n I_{n+1} = (2n-1) I_n + \frac{x}{(x^2+1)^n}$ எனக் காட்டுக.

If $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, show that

$2n I_{n+1} = (2n-1) I_n + \frac{x}{(x^2+1)^n}$.

20. (அ) (i) $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$ என நிறுவுக.

(ii) $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$ என நிறுவுக.

(i) Prove that $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$.

(ii) Prove that $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$.

Or

(ஆ) $\vec{F} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$ ஆகிய தளங்களால் சூழப்பட்ட கனச் சதுரம் எனில் காகின் பாய்வுத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$

காண்க.

If $\vec{F} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ and S is a cube bounded by the planes $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$ evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ by

using Gauss divergence theorem.