

(For candidates admitted from 2000 – 2001 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2022.

Part III — Allied

MATHEMATICS – II
INTEGRAL CALCULUS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL questions.

1. மதிப்பிடுக : $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$.

Evaluate : $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$.

2. காண்க : $\int_0^1 \int_0^2 (x+2) dy dx$.

Find : $\int_0^1 \int_0^2 (x+2) dy dx$.

3. $\phi = x^2 + y - z = 1$ எனில் $(1,0,0)$ என்ற புள்ளியில் $\text{grad } \phi$ காண்க.

If $\phi = x^2 + y - z = 1$, then find $\text{grad } \phi$ at $(1,0,0)$.

4. $(1,1,1)$ என்ற புள்ளியில் $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ன் ஓரலகு செங்குத்து வெக்டர் காண்க.

Find a unit normal to $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ at $(1,1,1)$.

5. $f = x^2 \bar{i} + y^2 \bar{j}$ எனில் $y = x$ வழியாக $(0,0)$ முதல் $(1,1)$ வரை $\int f \cdot dr$ காண்க.

If $f = x^2 \bar{i} + y^2 \bar{j}$ find $\int f \cdot dr$ along $y = x$ from $(0,0)$ to $(1,1)$.

6. காசின் divergence தேற்றத்தை எழுதுக.

State Gauss – divergence Theorem.

7. தீர்க்க : $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

8. தீர்க்க : $(D^2 + 2D + 1)y = 0$.

Solve : $(D^2 + 2D + 1)y = 0$.

9. காண்க : $L(t^2 + 3)$.

Find : $L(t^2 + 3)$.

10. காண்க : $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + b^2}\right)$

Find : $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + b^2}\right)$

SECTION B — (5 × 6 = 30)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b)

11. (அ) நிரூபி : $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \log 2$.

Prove : $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \log 2$.

Or

(ஆ) $(0, \pi)$ ல் $\pi - x$ ன் கொசைன் தொடர் காண்க.

Expand $\pi - x$ ($0 < x < \pi$) as a cosine series.

12. (அ) $\vec{f} = (x + 2y + az)i + (bx - 3y - 2)j + (4x + cy + 2z)k$ ஒரு சுழலற்ற வெக்டர் எனில் a, b, c ன் மதிப்பு காண்க.

Find the value of a, b, c . So that $\vec{f} = (x + 2y + az)i + (bx - 3y - 2)j + (4x + cy + 2z)k$ is irrotational.

Or

(ஆ) $\nabla \phi = 2xyz^3i + x^2z^3j + 3x^2yz^2k$ மற்றும் $\phi(1, -2, 2) = 4$ எனில் $\phi(x, y, z)$ காண்க.

If $\nabla \phi = 2xyz^3i + x^2z^3j + 3x^2yz^2k$ then find $\phi(x, y, z)$ if $\phi(1, -2, 2) = 4$.

13. (அ) $f = (x + y^2)i - 2xj + 2yzk$ மற்றும் S என்பது $2x + y + 2z = 6$ எனில் முதல் எண் கோண பரப்பில் $\iint_S f \cdot n \, ds$ ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\iint_S f \cdot n \, ds$, Where $f = (x + y^2)i - 2xj + 2yzk$ and S is the surface of the plane $2x + y + 2z = 6$ in the first octant.

Or

- (ஆ) கிரீன் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி C என்பது $(0,0)$ முதல் $(1,1)$ வரை உள்ள வளைவு $y = x$ மற்றும் $y = x^3$ எனில் $\int_C (x^2 y \, dx + y^3 \, dy)$ ன் மதிப்பு காண்க.

Using Green's theorem evaluate $\int_C (x^2 y \, dx + y^3 \, dy)$ where C is the closed path formed by $y = x$ and $y = x^3$ from $(0,0)$ to $(1,1)$.

14. (அ) தீர்க்க: $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \frac{\sin x \cos^2 x}{y^2}$.

Solve: $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \frac{\sin x \cos^2 x}{y^2}$.

Or

- (ஆ) தீர்க்க: $(D^2 + 4)y = e^x + \cos 2x$.

Solve: $(D^2 + 4)y = e^x + \cos 2x$.

15. (அ) $L[f(t)] = F(s)$ எனில் $L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ மற்றும் $L[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$ என நிரூபி.

If $L[f(t)] = F(s)$ then prove that $L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ and $L[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$

Or

- (ஆ) காண்க: $L^{-1}\left[\frac{1 + 2s}{(s + 2)^2(s - 1)^2}\right]$.

Find: $L^{-1}\left[\frac{1 + 2s}{(s + 2)^2(s - 1)^2}\right]$.

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $f(x) = x + x^2 (-\pi < x < \pi)$ எனில்

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots \right) + 2 \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

என நிரூபி.

If $f(x) = x + x^2 (-\pi < x < \pi)$,

Prove

that

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots \right) + 2 \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

Or

- (ஆ) $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$, என்ற தளங்களால் சூழப்பட்ட

பகுதியில் $\iiint (x + y + z) dx dy dz$ ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\iiint (x + y + z) dx dy dz$ over the region bounded by

$x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

17. (அ) நிரூபி : $\text{div curl } f = 0$ மற்றும் $\text{curl grad } \phi = 0$.

Prove : $\text{div curl } f = 0$ and $\text{curl grad } \phi = 0$.

Or

(ஆ) $f = 5t^2 i + t j - t^3 k$, $g = \sin t i - \cos t j$ எனில் $\frac{d}{dr}(f \cdot g)$ மற்றும் $\frac{d}{dr}(f \times g)$ காண்க.

If $f = 5t^2 i + t j - t^3 k$ and $g = \sin t i - \cos t j$. find $\frac{d}{dr}(f \cdot g)$ and $\frac{d}{dr}(f \times g)$.

18. (அ) S என்பது $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a$ and $z = a$ ஆல் சூழப்பட்ட கன சதுரம் $f = (x^3 - yz) i - 2x^2 y j + 2k$ எனில் $\iint f \cdot n \, ds$ ன் மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\iint f \cdot n \, ds$ where $f = (x^3 - yz) i - 2x^2 y j + 2k$ and S is the surface of the cube bounded by $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a$ and $z = a$.

Or

(ஆ) $\vec{f} = (x^2 - yz)i + (y^2 - zx)j + (z^2 - xy)k$ என்ற வெக்டருக்கு $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ என்ற செவ்வக பெட்டியில் காஸின் விரியும் தேற்றத்தை விவரி.

Verify Gauss divergence theorem for $\vec{f} = (x^2 - yz)i + (y^2 - zx)j + (z^2 - xy)k$ taken over the rectangular parallelo piped $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$.

19. (அ) தீர்க்க: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} + 12y = x^4$.

Solve: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} + 12y = x^4$.

Or

(ஆ) தீர்க்க: $\frac{dy}{dt} + y = \sin t + 1, \frac{dy}{dx} + x = \cos t$.

Solve: $\frac{dy}{dt} + y = \sin t + 1, \frac{dy}{dx} + x = \cos t$.

20. (அ) தீர்க்க: $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 3y = \sin t, y = \frac{dy}{dt} = 0, t = 0.$

Solve: $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 3y = \sin t, y = \frac{dy}{dt} = 0, t = 0.$

Or

(ஆ) தீர்க்க: $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 4e^{-t}, y = \frac{dy}{dt} = 0, t = 0.$

Solve: $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 4e^{-t}, y = \frac{dy}{dt} = 0, t = 0.$
