

S.No. 8692 T

22 SCCMM 2

(For candidates admitted from 2022–2023 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2022.

Part III — Mathematics – Major

INTEGRAL CALCULUS AND FOURIER SERIES

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (20 marks)

Answer ALL questions.

I. (A) Choose the correct answer : (5 × 1 = 5)

1. $\int_0^a f(x) dx =$

(A) $\int_0^a f(a-x) dx$

(B) $\int_0^a f(a+x) dx$

(C) $\int_0^a f(x-a) dx$

(D) $\int_0^a dx$

$$\int_0^a f(x)dx =$$

$$(a) \int_0^a f(a-x)dx$$

$$(b) \int_0^{\infty} f(a+x)dx$$

$$(c) \int_0^a f(x-a)dx$$

$$(d) \int_0^{\infty} dx$$

2. $y^2 = 4ax$, x -அச்ச மற்றும் $x = h$ ஆகிய வளைவுகளுக்கு உட்பட்ட பகுதி.

$$(அ) \int_0^{\infty} \sqrt{4ax} dx$$

$$(ஆ) 2 \int_0^h \sqrt{4ax} dx$$

$$(இ) \int_0^h \frac{y^2}{4a} dx$$

$$(ஈ) \int_0^h \frac{y^2}{4a} dy$$

The are bounded by the curve $y^2 = 4ax$, the x -axis and $x = h$ is

$$(a) \int_0^{\infty} \sqrt{4ax} dx$$

$$(b) 2 \int_0^h \sqrt{4ax} dx$$

$$(c) \int_0^h \frac{y^2}{4a} dx$$

$$(d) \int_0^h \frac{y^2}{4a} dy$$

3. மூன்று ஒருங்கிணைந்த தொகையிடு என்பது _____ தொகையிடு ஆகும்.

(அ) சமதளப் பரப்பு

(ஆ) பரப்பளவு

(இ) கனபரிமாணம்

(ஈ) எதுவும் இல்லை

Triple integrals are integrals over

(a) Plane

(b) Area

(c) Volume

(d) None

$$4. \sqrt{n+1} =$$

$$(அ) (n-1)!$$

$$(ஆ) (n+1)!n$$

$$(இ) (n-1)!n-1$$

$$(ஈ) n!$$

$$\sqrt{n+1} =$$

$$(a) (n-1)!$$

$$(b) (n+1)!n$$

$$(c) (n-1)!n-1$$

$$(d) n!$$

5. $f(x)$ ஒற்றை சார்பு எனில் $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx =$ _____.

$$(அ) 0$$

$$(ஆ) 1$$

$$(இ) \pi$$

$$(ஈ) 2\pi$$

If $f(x)$ is an odd function, then

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (a) 0 (b) 1
(c) π (d) 2π

(B) Fill in the blanks: (5 × 1 = 5)

6. $\int_0^{\pi} \sin^6 x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

$$\int_0^{\pi} \sin^6 x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. $y = f(x)$ என்கிற வளைவரைக்கும் $x = a$, $x = b$ மற்றும் x -அச்சிற்கு இடைப்பட்ட பகுதியில் பரப்பளவு ஆகும்.

The area of the curve $y = f(x)$ between the ordinate $x = a$, $x = b$ and x -axis is .

8. $\int_0^{\infty} \int_0^y \frac{e^{-y}}{y} \, dx \, dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

$$\int_0^{\infty} \int_0^y \frac{e^{-y}}{y} \, dx \, dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

9. $\int_0^1 x^7 (1-x)^8 \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

$$\int_0^1 x^7 (1-x)^8 \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

10. $f(x)$ ன் ஃபூரியர் தொடர்வரிசை = .

Fourier Series of $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

II. Answer the following questions. (5 × 2 = 10)

11. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்கிற லெமினிஸ்காட் வளைவின் முழு பரப்பளவு காண்க.

Find the entire area of the lemniscate

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

12. $\int_3^4 \int_1^2 (xy + e^y) \, dx \, dy$ யை கண்டுபிடிக்கவும்.

Find $\int_3^4 \int_1^2 (xy + e^y) \, dx \, dy.$

13. தீர்க்க $\int_0^{\pi/2} x(1-x^2)^{1/2} dx$.

Evaluate $\int_0^{\pi/2} x(1-x^2)^{1/2} dx$.

14. $\lceil(n+1)\rceil = n\lceil n \rceil$ என நிறுவுக.

Prove $\lceil(n+1)\rceil = n\lceil n \rceil$.

15. இரட்டை மற்றும் ஒற்றை சார்பை வரையறுக்கவும்.
Define even and odd function.

PART B — (5 × 5 = 25)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) நிறுவுக $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{3/2}}{(\sin x)^{3/2} + (\cos x)^{3/2}} dx = \pi/4$.

Prove $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{3/2}}{(\sin x)^{3/2} + (\cos x)^{3/2}} dx = \pi/4$.

Or

(ஆ) தீர்க்க $\int x^2 \tan^{-1} x dx$.

Evaluate $\int x^2 \tan^{-1} x dx$.

17. (அ) $x = a(\theta - \sin \theta)$; $y = a(1 - \cos \theta)$ ஆகிய வளைவரையின் ஒரு வளைவுக்கும் அதன் அடிதளத்திற்கும் இடைபட்ட பரப்பளவை காண்க.

Find the area bounded by one arch of the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$; $y = a(1 - \cos \theta)$ and its base.

Or

(ஆ) $r = a(1 + \cos \theta)$ கார்டியோயிடின் பரப்பளவை காண்க.

Find the area of the Cardiod $r = a(1 + \cos \theta)$.

18. (அ) $\iint xy dx dy$ இன் மதிப்பை $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் மிகை கால் பகுதியில் காண்க.

Evaluate $\iint xy dx dy$ taken over the positive quadrant of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

Or

(ஆ) வரிசைமாற்றி தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^a \int_{x^2/a}^{2a-x} xy \, dx \, dy \text{ இன் மதிப்பு காண்.}$$

Change the order of integration in the

$$\text{integral } \int_0^a \int_{x^2/a}^{2a-x} xy \, dx \, dy \text{ and evaluate it.}$$

19. (அ) தீர்க்க $\int_0^1 x^m \left(\log \frac{1}{x} \right)^n dx$.

$$\text{Evaluate } \int_0^1 x^m \left(\log \frac{1}{x} \right)^n dx.$$

Or

(ஆ) $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ யை காமா சார்பில் எழுதவும்.

Express $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ in terms of Gamma function.

20. (அ) $f(x) = x$ எனில் $(0, \pi)$ இடைவெளியில் பூரியர் கொசைன் தொடர் காண்க.

Find the half-range Fourier Cosine series for $f(x) = x$ in $(0, \pi)$.

Or

(ஆ) $f(x) = x(\pi - x)$ எனில் $(0, \pi)$ இடைவெளியில் பூரியர் சைன் தொடர் காண்க.

Find the half-range Sine series for $f(x) = x(\pi - x)$ in $0 < x < \pi$.

PART C — $(3 \times 10 = 30)$

Answer any THREE questions.

21. $I_{m,n} = \int x^m (\log x)^n dx$ ஐ காமா சார்புகளின் எழுதி $\int x^4 (\log x)^3 dx$ என்ற தொகையிடலை மதிப்பிடுக.

Find $I_{m,n} = \int x^m (\log x)^n dx$ where m and n are +ve int. and hence evaluate $\int x^4 (\log x)^3 dx$.

22. $y^2 = 4ax$ மற்றும் $x^2 = 4by$ என்கிற பரவளையத்திற்கு இடைப்பட்ட பகுதிக்கு பரப்பளவு காண்க.

Find the area bounded by the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4by$.

23. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ கோளத்தின் மிகை எண் பகுதியில் $\iiint xyz \, dx dy dz$ மதிப்பு காண்க.

Evaluate $\iiint xyz \, dx dy dz$ taken through the positive octant of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

24. பீட்டா சார்புக்கும் காமாக் சார்புக்கும் உள்ள தொடர்பை எழுதி நிறுவுக.

Prove the relation between Beta and Gamma functions.

25. $f(x) = x, (0, \pi)$ எனில் $(0, 2\pi)$
 $= 2\pi - x, (\pi, 2\pi)$
இடைவெளியில் பூரியர் தொடரை காண்க.

Express $f(x) = x$ in $(0, \pi)$ as a Fourier series in the range $(0, 2\pi)$.