(7 pages)

S.No. 8670 T **16 SCCMM 5**

(For candidates admitted from 2016–2017 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2022.

Part III — Mathematics – Major

SEQUENCES AND SERIES

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20)

Answer ALL the questions.

1. எல்லை தொடர் வரிசையை வரையறு. மேல் எல்லை பெற்றிருக்கும் கீழ் எல்லையற்ற ஒரு தொடர்வரிசை எடுத்துக் காட்டு தருக.

   Define a bounded sequence. Give an example of a sequence such that it is bounded above but not bounded below.

2. ஓரியல்பான தொடர் வரிசையை வரையறு.

   Define a monotonic sequence.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$–ன் மதிப்பு காண்க.

   Evaluate $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$ எனக் காட்டுக.

   Show that $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ என நிரூபி.

   Prove that $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.

6. தொடர் வரிசை $\left((-1)^n\right)$ ஒரு கோஷி தொடர் வரிசை இல்லை எனக் காட்டுக.

   Show that the sequence $\left((-1)^n\right)$ is not a Cauchy sequence.

7. தொடர் $1-1+1-1+1-1+\ldots$ ஒரு முடிவுள்ள அலையும் தொடர் எனக் காட்டுக.

   Show that the series $1-1+1-1+1-1+\ldots$ is a finite oscillating series.

8. ஒப்பீட்டு சோதனையை எழுதுக.

   Write the comparision test.

9. காஷியின் மூல சோதனையை எழுதுக.

State the Cauchy's root test.

10. ஒன்றுவிட்ட (alternating) தொடரை வரையறு. எடுத்துக்காட்டு தருக.

Define alternating series. Give an example.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $(a_n) \to 0$ மற்றும் எல்லா $n \in N$-க்கும் $a_n > 0$ எனில் $\left(1/a_n\right) \to \infty$ என நிரூபி.

Prove that if $(a_n) \to 0$ and $a_n > 0$ for all $n \in N$ then $\left(1/a_n\right) \to \infty$.

Or

(ஆ) ∞-ல் விரியும் எல்லா தொடர் வரிசை (a_n)-ம் கீழ் எல்லையைப் பெற்றிருக்கும் ஆனால் மேல் எல்லையைப் பெற்றிருக்காது என நிரூபி.

Prove that any sequence (a_n) diverging to ∞ is bounded below but not bounded above.

12. (அ) $(a_n) \to 0$ மற்றும் $(b_n) \to b$ எனில் $(a_n b_n) \to ab$ என நிரூபி.

If $(a_n) \to 0$ and $(b_n) \to b$ then prove that $(a_n b_n) \to ab$.

Or

(ஆ) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ என நிரூபி.

Prove that $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$.

13. (அ) சிசாரோவ் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Cesaro's theorem.

Or

(ஆ) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ என நிரூபி.

Prove that $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

14. (அ) $\sum \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^p}$-ன் ஒருங்குதலை ஆராய்க.

Discuss the convergence of the series $\sum \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^p}$.

Or

(ஆ) $\sum \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

Show that $\sum \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

15. (அ) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ என்ற தொடர் முழுவதுமாக (absolutely) குவியும் என நிரூபி, $x \in R$.

Prove that the exponential series $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ converges absolutely for all $x \in R$.

Or

(ஆ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ –ன் குவிதலை ஆராய்க.

Discuss the convergence of $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

SECTION C — (3 × 10 = 30)

Answer any THREE questions.

16. (அ) ஒவ்வொரு குவியும் தொடர் வரிசையும் எல்லையுடைய தொடர் வரிசை என நிரூபி.

(ஆ) $(a_n) \to \infty \Leftrightarrow (-a_n) \to -\infty$ என நிரூபி.

(a) Prove that any convergent sequence is a bounded sequence.

(b) Prove that $(a_n) \to \infty$ if and only if $(-a_n) \to -\infty$.

17. (r^n) என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் குணாதிசயங்களை ஆராய்க.

Discuss the behaviour of the geometric sequence (r^n).

18. கோசியின் இரண்டாம் எல்லை மதிப்பு தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

State and prove Cauchy's second limit theorem.

19. $\sum \frac{1}{n^p}$ என்ற தொடர் $p < 1$–ல் குவியும் மற்றும் $p \le 1$–ல் விரியும் தொடர் என நிரூபி.

Prove that the series $\sum \frac{1}{n^p}$ converges if $p < 1$ and diverges if $p \le 1$.

20. $\frac{2}{3}x + \frac{2.3}{3.5}x^2 + \frac{2.3.4}{3.5.7}x^3 + \ldots \quad (x > 0)$ என்ற தொடரின் குவிதலை ஆராய்க.

Examine for convergence the series

$$\frac{2}{3}x + \frac{2.3}{3.5}x^2 + \frac{2.3.4}{3.5.7}x^3 + \ldots \quad (x > 0).$$